3 luglio 2012, Equazioni Differenziali a.a. 2011/12

1. Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^4 - 2t^3 y}{2ty^3 - t^4}. \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2. a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste e per quali esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = |x - x_o|^a + \operatorname{arctg}(x^2 + t^2) \\ x(t_o) = x_o. \end{cases}$$

   b) Determinare per quali valori di a e per quali $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale esplode in tempo finito e per quali esiste per ogni $t > t_o$.

3. a)Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + y, \\ z' = x + z \end{cases}$$

   b)Determinare per quali dati iniziali la soluzione $(x(t), y(t), z(t))$è monotona crescente in $z(t)$.

4. Considerare il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'' = xy^2, \\ y'' = yx^2. \end{cases} \tag{1}$$

   a)Dimostrare che se $(x(t), y(t))$ è una soluzione del sistema (1) allora $(x')^2 + (y')^2 - x^2y^2$ è costante.

   b)Scrivere (1) come un sistema di equazioni del primo ordine $Z' = F(Z)$.

   c) Sia B_1 la palla unitaria centrata nell'origine. Sia $\Phi^t(Z)$ il flusso associato, dimostrare che $\frac{d|\Phi^t(B_1)|}{dt} = 0$.

5. Sia f una funzione reale definita in $\mathbb{R}$. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = f(x) - y \end{cases}$.

   a) Se $f(x) = x^2 - 4x$ determinare i punti critici del sistema. Scrivere il sistema linearizzato nei punti critici e studiarne la natura.

   b) Sia f una funzione $C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Determinare quali condizioni su f garantiscono che sia un punto sella.