15 giugno 2012, Equazioni Differenziali a.a. 2011/12

1. Sia il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = e^{2t}(x-1)^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = x_o. \end{cases}$

   a) Per $x_o = 2$ determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

   b) Esiste un dato iniziale per cui la soluzione non è unica?

2. a) Dimostrare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = xe^{-(x^2+t^2)} - \sin x \\ x(t_o) = x_o. \end{cases}$$

   b) Verificare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale esiste $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. a)Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

   b)Se B_r indica la palla di raggio r, e ϕ^t è il flusso associato al sistema, dimostrare che $\phi^t(B_R) = B_{e^t R}$.

4. Considerare i problemi di Cauchy
$$\begin{cases} x' = x^+ \\ x(0) = x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = x. \end{cases}$$

   a) Dimostrare che i rispettivi flussi $\phi^t(x)$ e $\psi^t(x)$ sono definiti per ogni $t > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Dimostrare che $\phi^t(x) \leq \psi^t(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5. Sia il sistema
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + x^2 + y^2 - 1 \\ (x(0), y(0)) = (x_o, y_o) \end{cases}$$

   a)Determinare se il sistema è Hamiltoniano

   b) Determinare i punti critici del sistema e la loro natura.

   c) Dimostrare che se $|(x_o, y_o)| = 1$ allora la soluzione è periodica, determinare l'orbita $\phi^t(x_o, y_o)$. Calcolare $L_\omega(x_o, y_o)$.

   d) Se $B_1(0)$ è il disco di centro 0 raggio 1, dimostrare che $\phi^t(B_1(0)) = B_1(0)$.