$\gamma(t) = (2\cos^2 t,\ 2\sin^2 t),\qquad t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

1°) Curva è ~~...~~ chiusa $\to \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 2) \neq \gamma(\pi) = (2, 0)$.

2°) Curva è semplice

3°) $(2, 2) \in$ Sostegno di γ

4°) ~~Se~~ Curva è regolare.

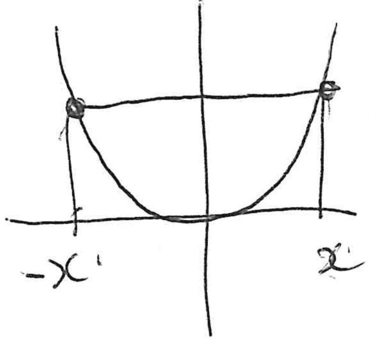
5°) Lunghezza della Curva

Facolt. 6°) Disegnare la curva.

2°) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Longrightarrow \underbrace{(2\cos^2 t_1,\ 2\sin^2 t_1)}_{=\gamma(t_1)} = \underbrace{(2\cos^2 t_2,\ 2\sin^2 t_2)}_{=\gamma(t_2)}$

$$\begin{cases} \cancel{2}\cos^2 t_1 = \cancel{2}\cos^2 t_2 \\ \cancel{2}\sin^2 t_2 = \cancel{2}\sin^2 t_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos^2 t_1 = \cos^2 t_2 \\ \sin^2 t_1 = \sin^2 t_2 \end{cases}$$

$t_2, t_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Longrightarrow \cos t_1 < 0,\ \cos t_2 < 0$



x^2

$\cos^2 t_1 = \cos^2 t_2$

$\cos t_1 = \cos t_2$

$\cancel{\cos t_1 = -\cos t_2}$

ma $\cos t_1 < 0$, $\cos t_2 < 0$

$x^2 = 4 = 2^2$ → $x = 2$, $x = -2$

$\boxed{\cos t_1 = \cos t_2} \Rightarrow t_1 = t_2$

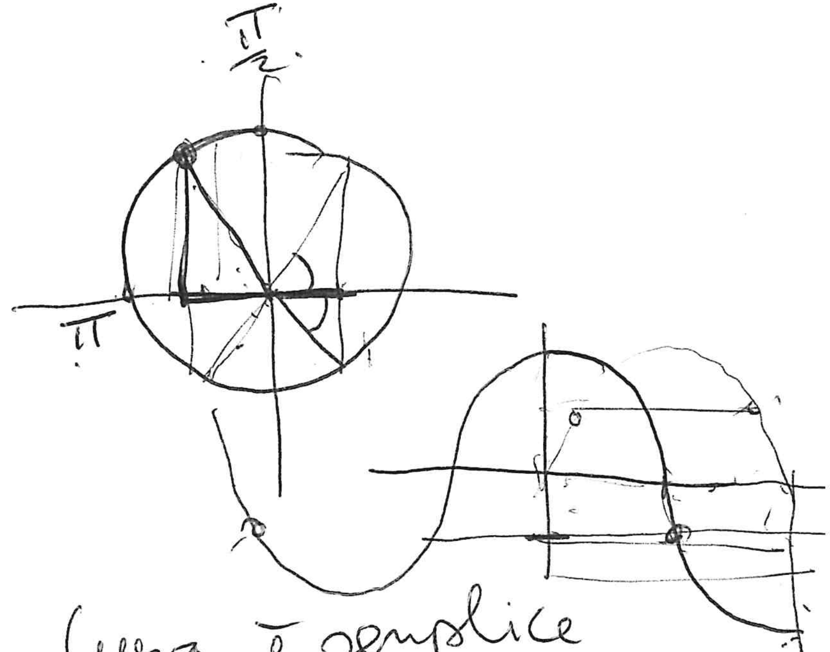
~~cos t~~ $t_1 = t_2$

~~oppure~~

IMPOSSIBILE $\boxed{t_1 = \pi - t_2}$

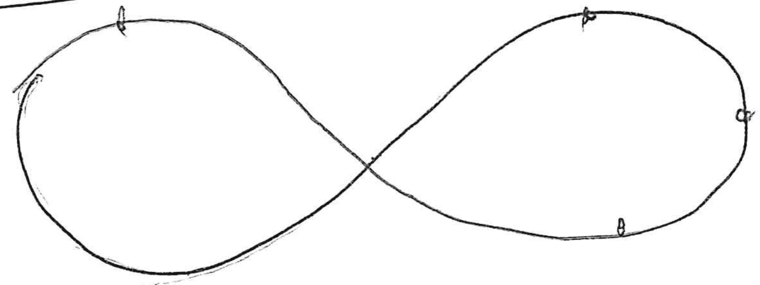
IMPOSSIBILE $\boxed{t_1 = -t_2}$

→ $t_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $t_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$



Curva è semplice

ALTRO METODO:



$x(t)$ è monotona crescente (o decrescente) in $[a,b]$.

oppure $y(t)$ è " " " in $[a,b]$.

allora la curva è semplice.

Calcoliamo $x'(t)$ e $y'(t)$. se una delle due ha segno costante allora la curva è semplice.

$x(t) = 2\cos^2 t \longrightarrow x'(t) = 4\cos t \cdot (-\sin t) = -4\cos t \sin t$

$t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\cos t < 0$, $\sin t > 0$

$\Downarrow$

$x'(t) > 0 \Longrightarrow x(t) \nearrow$ ~~costante~~ crescente

La curva è semplice.

3°) Verificare se esiste un valore $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tale che

$$\begin{cases} x(t)=2 \\ y(t)=2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2\cos^2 t = 2 \\ 2\sin^2 t = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos^2 t = 1 \\ \sin^2 t = 1 \end{cases}$$

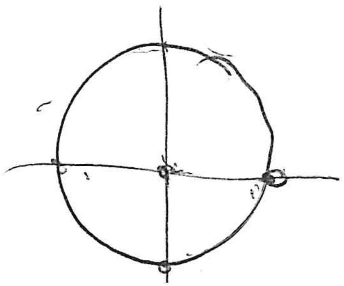
$$\cos^2 t = 1 \begin{cases} \to t = 0 \notin [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \to t = \pi \longrightarrow \sin^2 \pi = 0 \neq 1 \end{cases}$$

$(2,2) \notin$ Sostegno di γ.

4°) Curva <u>regolare</u>. $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\begin{cases} x'(t) = -4\cos t \sin t = 0 \\ y'(t) = 4 \sin t \cos t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} t = k\pi \Longrightarrow t = \pi \\ t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\forall t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \quad (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$. la curva è <u>regolare</u>.



ATTENZIONE:
Se avessi definito la curva nell'intervallo $[0,\pi] \Longrightarrow$ non era regolare perché in $\frac{\pi}{2} \to (x'(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = (0,0)$

5) Lunghezza della curva:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |v(t)|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{(\underbrace{-4\cos t\sin t}_{x'(t)})^2 + (\underbrace{4\cos t\sin t}_{x'(t)})^2}\,dt \doteq -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\sqrt{2}\cos t\sin t\,dt.$$

$$\| $$

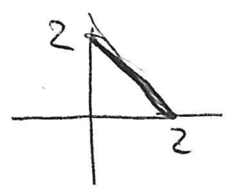
$$\underbrace{\sqrt{2}}\sqrt{(4\cos t\sin t)^2}$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{\sim}^{\sim} s\,ds = 4\sqrt{2}\,\frac{s^2}{2}\Big|_{\sim}^{\sim} = \frac{4\sqrt{2}}{2}(\cos t)^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$s = \cos t \qquad ds = -\sin t\,dt.$

$\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) = (2\cos^2 t, 2(1-\cos^2 t)).$

$s = \cos^2 t \quad (s, 1-s).$ $\quad x = s,\ y = 1-s \quad y = 1-x$



Esercizio 2. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$

a) γ è chiusa

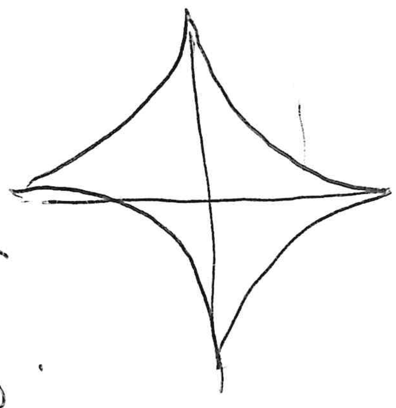
b) γ è regolare a tratti

c) Calcolare la lunghezza di γ.

a) $\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$ la funzioni sono 2π-periodiche

La curva è chiusa

b) $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$.



I punti dove si annulla $\sin t$ o $\cos t$.

$$\begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \implies x'(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ t = \pi \longrightarrow \sin\pi = 0 \implies x'(\pi) = y'(\pi) = 0 \\ t = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \implies x'(\frac{3\pi}{2}) = y'(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Regolare $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 \sin^2 t + 9\cos^2 t \sin^4 t}\; dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\; dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\; dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt$$

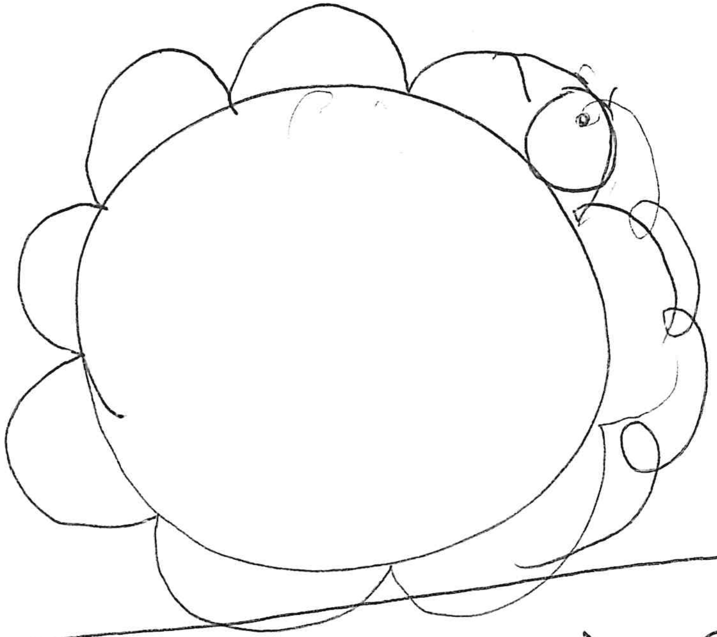
$s = \sin t$
$ds = \cos t\, dt$

$$= \frac{3}{2}\sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$L(\gamma) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

La famiglia delle IPOCICLOIDI

Cicloide



ES2 Trovare la parametrizz. delle curve di
- "Sant Ivo alla Sapienza"
- Zaha Hadid
- Felix Candela - Museo Oceanografico di Valencia

ES1

$$\vec{\gamma}(t) = \left((a-b)\cos t - b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,t\right),\ (a-b)\sin t + b\sin\left(\frac{a-b}{b}\cdot t\right) \right)$$

a e b interi. $a > b$.

$t \in [0, 2\pi b]$

1) Curva è chiusa
2) Regolare a tratti → trovare i pt. singolari
3) Calcolare la lunghezza della curva.