venerdì 18 dicembre 2020 11:02

Campi Vettoriali nel piano

Def: $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \in D \longrightarrow \vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Data una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

t.c. $\gamma(t) \in D \quad \forall t \in [a,b] \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$

Def: $L(\vec{F}, \gamma) = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

Lavoro di $\vec{F}$ lungo γ.

Def: $\vec{F}$ è un campo conservativo in D se esiste un potenziale $f : D \to \mathbb{R}$ t.c.

$\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$

$\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y)$

cioè
$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ F_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Def: $\vec{F}$ è un campo irrotazionale in D

se $\forall (x,y) \in D$ $\quad \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$

Proposizione 1: Se $\vec{F}$ è conservativo in $D \Longrightarrow \vec{F}$ è irrotazionale

Proposizione 2: Se $\vec{F}$ è irrotazionale in D e
D è semplicemente connesso

$\Downarrow$

$\vec{F}$ è conservativo ($\vec{F} = \nabla f$) in D.

<u>Proposizione 3</u>: Se $\vec{F}$ è conservativo in D cioè $\vec{F} = \nabla f$, allora $\forall \gamma \subset D$, $[a,b] \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{L(\vec{F}, \gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

In particolare, se γ è <u>chiusa</u> allora $\boxed{L(\vec{F}, \gamma) = 0}$

Invece di parlare di <u>campi vettoriali</u> si parla di <u>Forme differenziali</u>

$y = y(t)$

$$F(x,y) = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

$$F(x,y) = F_1(x(t), y(t))\,x'(t) + F_2(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$

$\acute{\gamma}$ $\acute{a}$

Esercizio 5, pg. 261, capitolo 6.6.

$$F(x,y) = (\sin x \cos y, \cos x \sin y)$$

$$\gamma(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0,1]$$

1. Dire se il Campo Vettoriale è Conservativo
2. Se lo è determinare il Potenziale
3. Calcolare $L(F, \gamma)$.

1) Dominio di F è tutto $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Quindi per rispondere alla domanda 1 basta verificare se F è irrotazionale cioè

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Non sbagliare

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cos y) = -\sin x \sin y$$

$$\|$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) = -\sin x \sin y$$

il conto quando si deriva.

Quindi F è irrotazionale, $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso

e se ne deduce che F è conservativo.

$\nabla f(x,y) = F(x,y)$, f?

2) Trovare f tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x,y) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sin x \cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \sin y \end{cases} \Longrightarrow f(x,y) = \int \sin x \cos y \, dx$$

(consid. f come se y fosse una costante)

$\cos y$ per l'integrale in dx è una costante, tirare fuori dall'integrale

$$f(x,y) = \cos y \int \sin x \, dx = \overbrace{-\cos y \cdot \cos x + g(y)}$$

$f(x,y) = \cos y$ ...

Usiamo la seconda equazione per determinare

$g(y)$. cioè

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{-\cos y \cdot \cos x + g(y)}\Big) = \underbrace{\sin y \cos x + g'(y)}$$

$= \underline{\cos x \cdot \sin y}$

$$\underbrace{\sin y \cdot \cancel{\cos x} + g'(y)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \underbrace{\cos x \cdot \cancel{\sin y}}_{F_2} \Longrightarrow g'(y) = 0$$

non dip. da x.

$g(y) = cte$ ($\Longrightarrow g(y) = 0$) Possiamo scegliere la costante a piacere

Il potenziale è

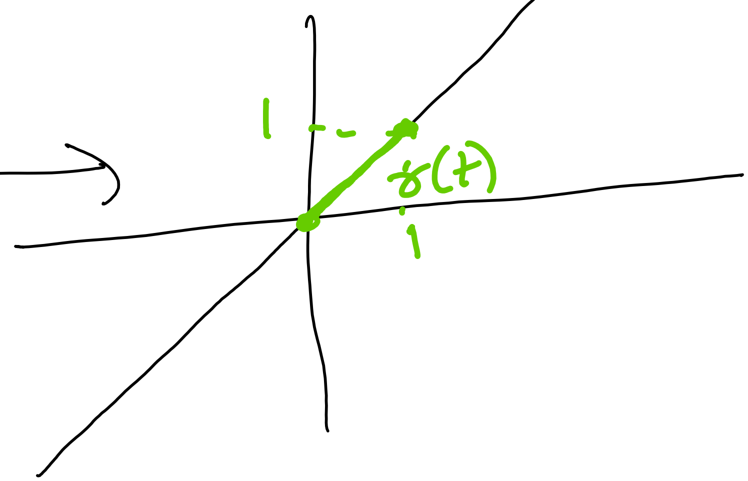
$f(x,y) = -\cos y \cdot \cos x$ | oppure $f(x,y) = -\cos y \cdot \cos x + C$.

determinato

OSS: Il potenziale può essere determinato in modo univoco a meno di una costante.
cioè se f_1 e f_2 sono due potenziali
allora $f_1(x,y) - f_2(x,y) =$ Costante.

3.) $L(F, \gamma)$, $\gamma(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$ $t \in [0,1]$

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \longrightarrow$$



$x = y$

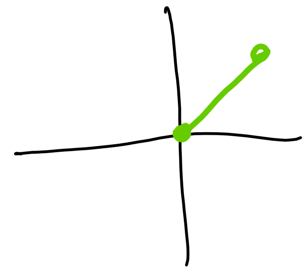
$\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (1,1)$

$$L(F, \gamma) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,1) - f(0,0)$$
$$= -(\cos 1)^2 + (\cos 0)^2$$

$$= 1 - (\cos 1)^2$$

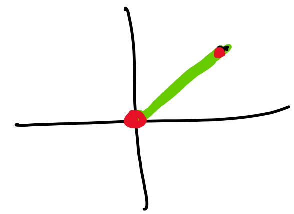
$\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$

$\gamma'(t) = (1,1)$



$\gamma(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$, $t \in [0,1]$

$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$



Esercizio 2)

$\vec{F}(x,y) = (x^2 y, -xy^2)$, $\gamma(t) = (e^t, t)$, $t \in [0,1]$

1) $\vec{F}$ conservativo?

2) Se lo è → Potenziale

3) $L(\vec{F}, \gamma)$.

1) Dominio di $\vec{F}$ è $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Verifichiamo se $\vec{F}$ è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) = x^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) = -y^2$$

$\vec{F}$ non è irrotazionale $\Longrightarrow$ $\vec{F}$ non è conservativo

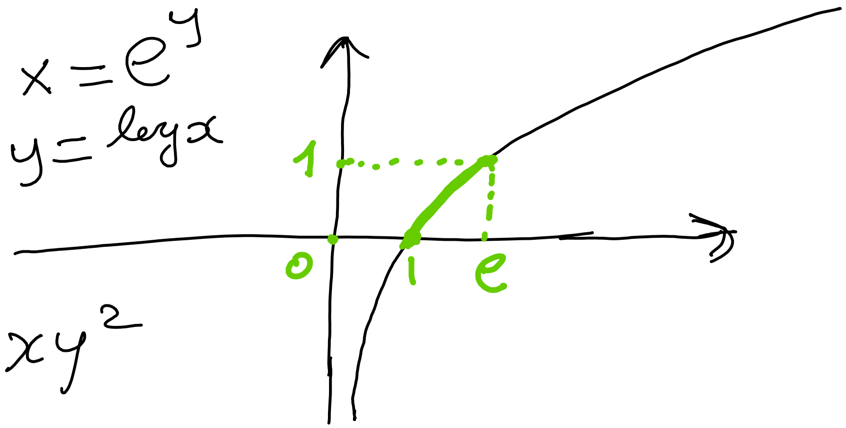
3) Per calcolare il lavoro dobbiamo usare la definizione

$$L(F,\gamma) = \int_a^b F_1(x(t), y(t))\, x'(t) + F_2(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

$t \in [0,1] \to \gamma'(t) = (e^t, 1)$

$\gamma(t) = (e^t, t)$, $t \in [0,1]$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = t \end{cases} \xrightarrow{\text{Supporto}} \begin{aligned} x &= e^y \\ y &= \log x \end{aligned}$$



$F_1(x,y) = x^2 y$ $F_2(x,y) = -xy^2$

$$L(F,\gamma) = \int_0^1 \underbrace{((e^t)^2 \cdot t)}_{F_1(\gamma(t))} \cdot \underbrace{e^t}_{x'(t)} + \underbrace{(-e^t \cdot t^2)}_{F_2(\gamma(t))} \cdot \underbrace{1}_{y'(t)} \, dt$$

$$= \int_0^1 e^{3t} \cdot t - t^2 e^t \, dt = \int_0^1 te^{3t} dt - \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$\int_0^1 te^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} \cdot t \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} t - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^1 = \frac{e^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}$$

$$\int_0^1 t e^{3t} dt = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}$$

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - \int 2t e^t dt = t^2 e^t - 2t e^t + 2\int e^t dt$$

$$= e^t (t^2 - 2t + 2)$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e^t (t^2 - 2t + 2) \Big|_0^1 = e - 2$$

$$L(F, \gamma) = \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9} - (e - 2) = \frac{2}{9} e^3 - e + \frac{19}{9}$$

$$F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \in D \longrightarrow (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

F è **conservativo** in D se esiste $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

t.c. $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ F_2(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ F_3(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

F è **irrotazionale** $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{|| Schwarz.} \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$

se $\mathrm{rot}\, \vec{F} = 0$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \Big(\underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}} , \underbrace{-\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}}} , \underbrace{-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}} \Big) = 0$$

Formalmente

$$\text{rot}\,\vec{F} = \det \begin{pmatrix} \boxed{\vec{i}} & \boxed{\vec{j}} & \boxed{\vec{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} F_1 \right)$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

<u>Proposizione</u>: Se F è conservativo $\Longrightarrow$ F è irrotazionale

<u>Proposizione</u>: Se F è irrotazionale e D è <u>semplicemente connesso</u> $\Longrightarrow$ F è conservativo.

La definizione di "semplicemente connesso"

Esempio del Campo Gravitazionale. Massa $M = (0,0,0)$
g costante.

$$F(x,y,z) = -\frac{g \cdot M}{|(x,y,z)|^3}(x,y,z)$$

$$d(x,y,z) = |(x,y,z)| \Longrightarrow |F| = \frac{g M}{|(x,y,z)|^3} |(x,y,z)| = \frac{g M}{|(x,y,z)|^2}$$

Il campo gravitazionale è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

e il potenziale è la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{gM}{|(x,y,z)|} = \frac{gM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Verifichiamo che

$$\boxed{\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$\Longmapsto \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(gM(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = gM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -gM \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = F_1(x,y,z)$$

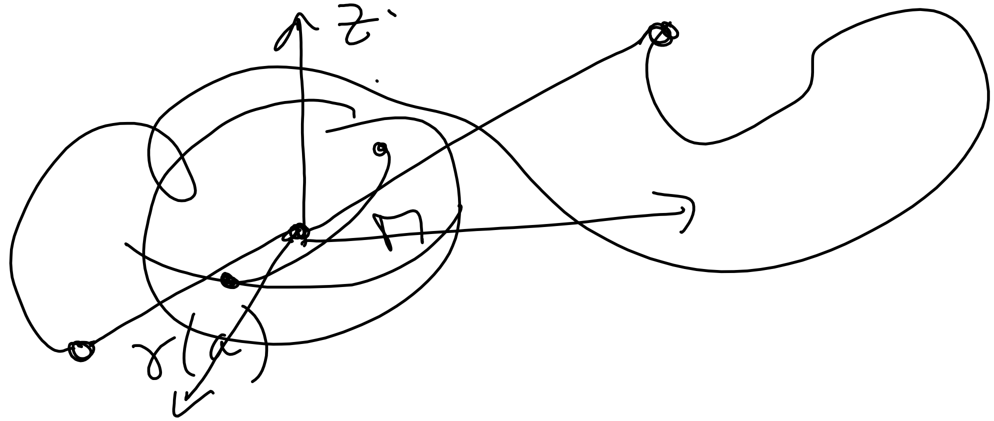
per simmetria $\longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$.

$$f(x,y,z) = \frac{gM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad L(F,\gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$= gM\left[\frac{1}{|\gamma(b)|} - \frac{1}{|\gamma(a)|}\right]$$

... il lavoro è quello

Quindi contributo per il ...
dovuto $|\gamma(b)|$ e $|\gamma(a)|$.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{gM\,x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-gM\,y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-gMz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = -gM\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{gM}{2}\int (s)^{-3/2}\,dt\right.$$

$s = x^2+y^2+z^2$

$ds = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}ds = x\,dx$

$$= -\frac{gM}{2}\,\frac{s^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{gM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f(x,y,z) = \frac{gM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + h(y,z)$$

usando le altre due equazioni troviamo che $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \Longrightarrow h(y,z) = \text{cte}$

possiamo sceglierla $= 0$.

Esempio Importante

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

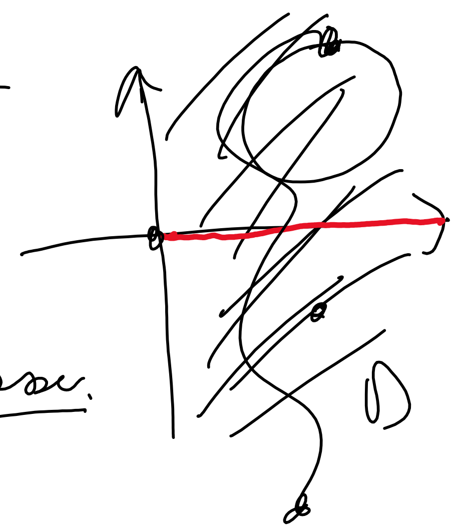
definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Vi ricordate che 1) F è regolare

2) F è irrotazionale

3) F non è conservativo perché $L(F,\gamma)$ con $\gamma = (\cos t, \sin t)$ al variare di ~~t~~ $t \in [0,2\pi]$ non è nullo

OSSERVAZIONE Se F è irrotazionale e il dominio non è semplicemente connesso non è detto che F sia conservativo.



Consideriamo $\tilde{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$

con $D = \{(x,y) \text{ t.c. } x > 0\}$

è un insieme semplicemente connesso.

$$\tilde{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

$\tilde{F}$ è irrotazionale in D

$\Longrightarrow$ $\tilde{F}$ è conservativo. esiste f t.c. $\tilde{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$f(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{y}{y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{y}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx = -\int \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + g(y)$$

$$s = \frac{x}{y} \qquad ds = \frac{1}{y}\,dx$$

Dalla seconda equazione $\Longrightarrow g(y) = 0$.

Il potenziale $f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ in $x>0$

Sapete, o dovreste sapere, che $\operatorname{arctg} t = -\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + 2\pi$

$$\longrightarrow \boxed{f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

che è definito in $x>0$.

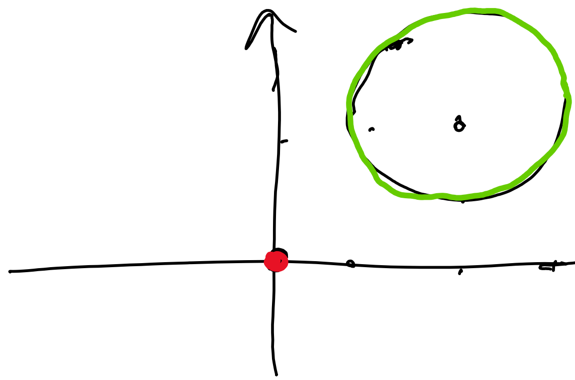
$$\nabla f = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \text{ in } x>0$$

Attenzione al dominio di esistenza del Potenziale rispetto al dominio di esistenza del campo Vettoriale,

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{\ldots}, \frac{x}{\ldots}\right) \text{ campo di esistenza } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$F(x,y) = \left(\frac{\;}{x^2+y^2}, \frac{\;}{x^2+y^2} \right)$

$$\gamma(t) = (2+\cos t,\ 2+\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$



γ è una curva chiusa t.c. la parte interna delimitata da γ è tutta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$D = \{x>0, y>0\}$, $\boxed{\gamma \subset D}$

Interno di $\gamma \subset D$

$\Longrightarrow \quad L(F,\gamma) = 0$

In D, F è irrotazionale, D è sempl. conn.

quindi F in D è conservativo

la curva è chiusa $\Longrightarrow$ $L(F,\gamma) = 0$.

... γ è una

Questo ragionamento non vale se ...
curva chiusa che contiene al suo interno
il punto $(0,0)$.