Esercizi su ODE del secondo Ordine, metodo delle Somiglianze

mercoledì 23 dicembre 2020 14:07

TIPO DI EQUAZIONE:

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

$b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

A) $f(x) = P_n(x)$, B) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, C) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$

1°) PRIMA TAPPA $y'' + by' + cy = 0$

$\longrightarrow y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

2°) Cerca una soluzione particolare

$y_p \longrightarrow y'' + by' + cy = f(x)$

con y_p della " STESSO TIPO " di f

A) $\longrightarrow y_p(x) = Q_n(x)$, B) $\longrightarrow y_p(x) = Q_n e^{\alpha x}$

C) $\longrightarrow y_p(x) = Q_n \cos \alpha x + R_n \sin \alpha x$

Purché y_p non sia già soluzione dell'equazione omogenea in quel caso bisognerà moltiplicare per "x"

Esercizio 1:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = xe^{3x} & \text{Eq. diff.} \\ y(0) = 0 \, , \; y'(0) = 1 & \text{Dato Iniziale} \end{cases}$$

Problema di Cauchy che avrà un'unica soluzione.

1°) Risolvere $y'' + 2y' = 0$

(algebrica)

determinare l'eq. caratteristica associata:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda+2) = 0 \begin{cases} \rightarrow \lambda = 0 \\ \rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\Longmapsto \quad y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2°) $y'' + 2y' = \underline{\underline{xe^{3x}}}$ $\quad \Longmapsto \quad f(x) = \underbrace{x}_{\text{Polinomio di grado 1}} \underbrace{e^{3x}}_{\text{exp.}}$

$\boxed{P_1(x) = x}$

quindi $\Longmapsto \quad y_p(x) = Q_1(x)\, e^{3x} = \underbrace{(ax+b)}_{Q_1(x)} e^{3x}$

$y_p(x) \neq y_0(x) \quad \underline{\underline{\forall a, \forall b.}}$

con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ incognite.

Voglio che y_p sia una soluzione.

Calcoliamo $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ e li mettiamo nell'equazione

$$y_p(x) = (ax+b)e^{3x}$$

Calcolo → $y_p'(x) = a\,e^{3x} + (ax+b)3e^{3x} = e^{3x}(3ax+3b+a)$

$$y_p''(x) = 3a\cdot e^{3x} + e^{3x}\cdot 3(3ax+3b+a)$$

→ $y_p''(x) = e^{3x}[9ax+9b+6a]$

$$y_p'' + 2y_p'(x) = \underbrace{e^{3x}\cdot[9ax+9b+6a]}_{y''} + \underbrace{2e^{3x}[3ax+3b+a]}_{y'}$$

$$= \underbrace{e^{3x}[15ax+8a+15b]}_{y_p''+2y_p'} = \underbrace{e^{3x}\cdot x}_{f(x)}$$

DUE POLINOMI SONO UGUALI SE HANNO GLI STESSI COEFFICIENTI

Due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti.

Il polinomio

$P_1(x) = 15ax + 8a + 15b$

$$\begin{cases} 15a = 1 \\ 8a + 15b = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{15}$

$\frac{8}{15} + 15b = 0$

e il parametro

$P_1(x) = x = 1 \cdot x + 0$

devono essere lo stesso polinomio.

$\Longrightarrow \quad y_p(x) = e^{3x}\left[\frac{1}{15}x - \frac{8}{225}\right]$

$b = -\frac{8}{(15)^2} = -\frac{8}{225}$

L'insieme delle soluzioni di $y'' + 2y' = xe^{3x}$ è dato da

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + e^{3x}\left[\frac{1}{15}x - \frac{8}{225}\right] \quad \forall c_1 \in \mathbb{R} \quad \forall c_2 \in \mathbb{R}}$$

Pb. di Cauchy: cioè tra tutte soluzioni quale verifica le condizioni iniziali: $\boxed{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}}$ $\quad c_1 ?$ e $c_2 ?$

Calcoliamo $\boxed{y(0) = c_1 + c_2 - \frac{8}{225} = 0}$ (*)

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x} + e^{3x}\cdot 3\left[\frac{1}{15}x - \frac{8}{225}\right] + e^{3x}\cdot\frac{1}{15}$$

$$\boxed{y'(0) = -2C_2 - \frac{24}{225} + \frac{1}{15} = 1}$$

$$-2C_2 - \frac{9}{225} = 1$$

$$2C_2 = -1 - \frac{9}{225} = -\frac{234}{225} \Longleftrightarrow C_2 = -\frac{117}{225}$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{13}{25}} \longrightarrow C_1 = -C_2 + \frac{8}{225}$$

$$C_1 = \frac{117}{225} + \frac{8}{225} = \frac{125}{225}$$

$$C_1 = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{9} - \frac{13}{25}e^{-2x} + e^{3x}\left[\frac{1}{15}x - \frac{8}{225}\right].}$$

Es 2 $\quad y'' + 2y' + 10y = x^2$

1°) Eq. omogenea: $y'' + 2y' + 10y = 0$

Eq. caratteristica $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ $\boxed{\text{NON HA SOL. REALI}}$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2}$$

$\sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{36}$

$$= -1 \pm i\frac{\sqrt{36}}{2}$$

dove $i = \sqrt{-1}$

$$= -1 \pm i\frac{6}{2} = -1 \pm 3i$$

-1 parte reale $\longrightarrow$ esp.

(3) parte om. $\longrightarrow$ [illegible]

$$\longmapsto \quad y_0(x) = C_0 e^{-x}\cos 3x + C_1 e^{-x}\sin 3x$$

$$= e^{-x}\left[C_0 \cos 3x + C_1 \sin 3x\right]$$

2) Trovare soluzione particolare

$$y'' + 2y' + 10y = x^2 \qquad (*)$$

$$f(x) = x^2 = P_2(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

$$\longmapsto \quad y_p(x) = Q_2(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c sono le incognite.

Imporre che y_p sia una soluzione di $(*)$, dove

calcolare $y_p'(x) = 2ax + b$

$$\underline{y_p''(x)} = 2a$$

$$\underbrace{2a}_{y''} + 2\cdot\underbrace{(2ax+b)}_{y'} + 10\,[\underbrace{ax^2+bx+c}_{y}] = x^2$$

$$10ax^2 + (10b+4a)x + 10c + 2b + 2a = x^2$$
$$= x^2 + 0x + 0$$

Cioè il polinomio a sinistra deve essere uguale al polinomio a destra.

$$\begin{cases} 10a = 1 \\ 10b + 4a = 0 \\ 10c + 2b + 2a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{10}}$$

$$10b = -4a = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$\boxed{b = -\frac{2}{50} = -\frac{1}{25}}$$

$$10c = -2b - 2a = +\frac{2}{25} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{25}$$

$$\boxed{C = -\frac{3}{250}}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{3}{250}}$$

L'insieme delle soluzioni è data da

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = C_0 e^{-x}\cos 3x + C_1 e^{-x}\sin 3x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{3}{250} \\ \forall C_0 \in \mathbb{R},\ \forall C_1 \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$

Esempio 3 : $y'' + 4y' - 21y = xe^{3x}$

1°) Risolviamo l'equazione omogenea

$$y'' + 4y' - 21y = 0 \longrightarrow \text{Eq. caratteristica}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm \sqrt{25} = \begin{cases} -7 \\ 3 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_0 e^{3x} + c_1 e^{-7x}$$

2°) Sol. particolare $y'' + 4y' - 21y = x e^{3x}$

quindi $f(x) = x e^{3x} = P_1(x) e^{3x}$

$$\cancel{y_p(x) = Q_1(x) e^{3x} = (ax+b) e^{3x}}$$

siccome e^{3x} è soluzione dell'omogenea allora devo moltiplicare per "x".

$$\ldots e^{3x} \quad (ax^2+bx) e^{3x}$$

$$y_p(x) = x(ax+b)e^{3x} = (ax^2+bx)e^{3x}$$

Verifichiamo se y_p potrebbe essere una soluzione

$$y_p'(x) = (2ax+b)e^{3x} + 3(ax^2+bx)e^{3x} = e^{3x}\left[3ax^2 + (2a+3b)x + b\right]$$

$$y_p''(x) = (6ax + 2a+3b)e^{3x} + 3e^{3x}\left[3ax^2 + (2a+3b)x + b\right]$$

$$y_p''(x) = e^{3x}\left[9ax^2 + (12a+9b)x + 2a + 6b\right]$$

Deve succedere che i termini in "x^2" spariscano

$$y_p'' + 4y_p' - 21y_p = e^{3x}\left[9ax^2 + (12a+9b)x + 2a+6b + 4\left(3ax^2 + (2a+3b)x + b\right) - 21(ax^2+bx)\right] =$$

$$= e^{3x}\left[x^2(\overbrace{9a+12a-21a}^{=0}) + x(12a+9b+8a+12b-21b) + 2a+6b+4b\right] =$$

$$= \underbrace{e^{3x}\left[x(20a) + 2a + 10b \right]}_{y'' + 4y' - 21y} = \underbrace{x e^{3x}}_{\substack{\shortparallel \\ f(x)}}$$

uguagliando i coeff. otteniamo:

$$\begin{cases} 20a = 1 \\ 2a + 10b = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow a = \frac{1}{20} \\ \longrightarrow 10b = -2a = -\frac{2}{20} = \frac{-1}{10} \end{array}$$

$$b = -\frac{1}{100}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{100}x \right) e^{3x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{L'insieme delle soluzioni è dato da} \\ y(x) = c_0 e^{3x} + c_1 e^{-7x} + \left(\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{100}x \right) e^{3x} \\ \forall c_0 \in \mathbb{R}, \forall c_1 \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

Sappiamo di aver pensato che la soluzione particolare

$y'' + 4y' - 21y = xe^{3x}$

fosse: $y_p(x) = (ax+b)e^{3x}$

$y_p'(x) = ae^{3x} + 3(ax+b)e^{3x} = e^{3x}[3ax+3b+a]$

$y_p''(x) = 3ae^{3x} + 3e^{3x}[3ax+3b+a] = e^{3x}[9ax+9b+6a]$

$y_p'' + 4y_p' - 21y_p = e^{3x}[9ax+9b+6a+4(3ax+3b+a) - 21(ax+b)]$

$= e^{3x}[x(\underbrace{9a+12a-21a}_{=0}) + 9b+6a+12b+4a-21b]$

$\cancel{a = \frac{x}{10}}$

$= e^{3x} \cdot 10a \equiv xe^{3x}$ IMPOSSIBILE

$P_2(x)e^{3x}$ $\quad$ $P_1(x)e^{3x}$

$$y_p(x) = (ax^2+bx)e^{3x}$$ che funziona.

$\boxed{\text{Es 4:}}$ $y'' + 4y' + 5y = \cos x$

1°) Equazione omogenea: $y'' + 4y' + 5y = 0$

$\Longrightarrow$ Eq. caratteristica associata

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

NON CI SONO SOL. REALI:

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Reale : $-2 \longrightarrow Ex$ | $y_0(x) = C_0 e^{-2x}\cos x + C_1 e^{-2x}\sin x.$

Im : $1 \longrightarrow$ trig | $C_0 \in \mathbb{R},\ C_1 \in \mathbb{R}$

2°) Soluzione particolare

$$y'' + 4y' + 5y = \underline{\cos x}$$

$$f(x) = \cos x \longrightarrow y_p(x) = a\cos x + b\sin x.$$

$$y_p'(x) = -a\sin x + b\cos x, \quad y_p'' = -a\cos x - b\sin x$$

$$y_p'' + 4y_p' + 5y_p = -a\cos x - b\sin x + 4(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x)$$

$$= \cos x \cdot [-a + 4b + 5a] + \sin x[-b - 4a + 5b]$$

$$= \cos x \cdot [4a + 4b] + \sin x \cdot [4b - 4a] = \cos x$$

Le due funzioni sono uguali se i coef. di $\cos x$ e $\sin x$ sono uguali:

$$\begin{cases} 4a+4b=1 \\ 4b-4a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b \qquad 8a=1 \Rightarrow \boxed{a=b=\frac{1}{8}}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x)=C_0e^{-2x}\cos x+C_1e^{-2x}\sin x+\frac{1}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x \quad (+)$$

$\forall C_0\in\mathbb{R}$ e $\forall C_1\in\mathbb{R}$

Se vogliamo risolvere il problema di Cauchy:

$$(*)\begin{cases} y''+4y'+5y=\cos x \\ y(0)=0\,,\ y'(0)=2 \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione dell'equazione è data da (+)

Tra tutte queste funzioni devo trovare quella che verifica $y(0)=0$ e $y'(0)=2$. cioè det. c_0 e c_1 per i dati iniziali

Calcoliamo $y(0)$ usando $(+)$ $\longrightarrow$

$$y(0) = c_0 + \frac{1}{8} = 0 \implies \boxed{c_0 = -\frac{1}{8}}$$

Calcoliamo $y'(x) = -2c_0 e^{-2x}\cos x - c_0 e^{-2x}\sin x - 2c_1 e^{-2x}\sin x + c_1 e^{-2x}\cos x$

$$- \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x.$$

$$y'(0) = -2c_0 + c_1 + \frac{1}{8} = 2$$

$$= \frac{1}{4} + c_1 + \frac{1}{8} = 2 \implies \boxed{c_1 = 2 - \frac{3}{8} = \frac{13}{8}}$$

La soluzione del Pb. di Cauchy è

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{8}e^{-2x}\cos x + \frac{13}{8}e^{-2x}\sin x + \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x}$$