CURVE – CAPITOLO 1.

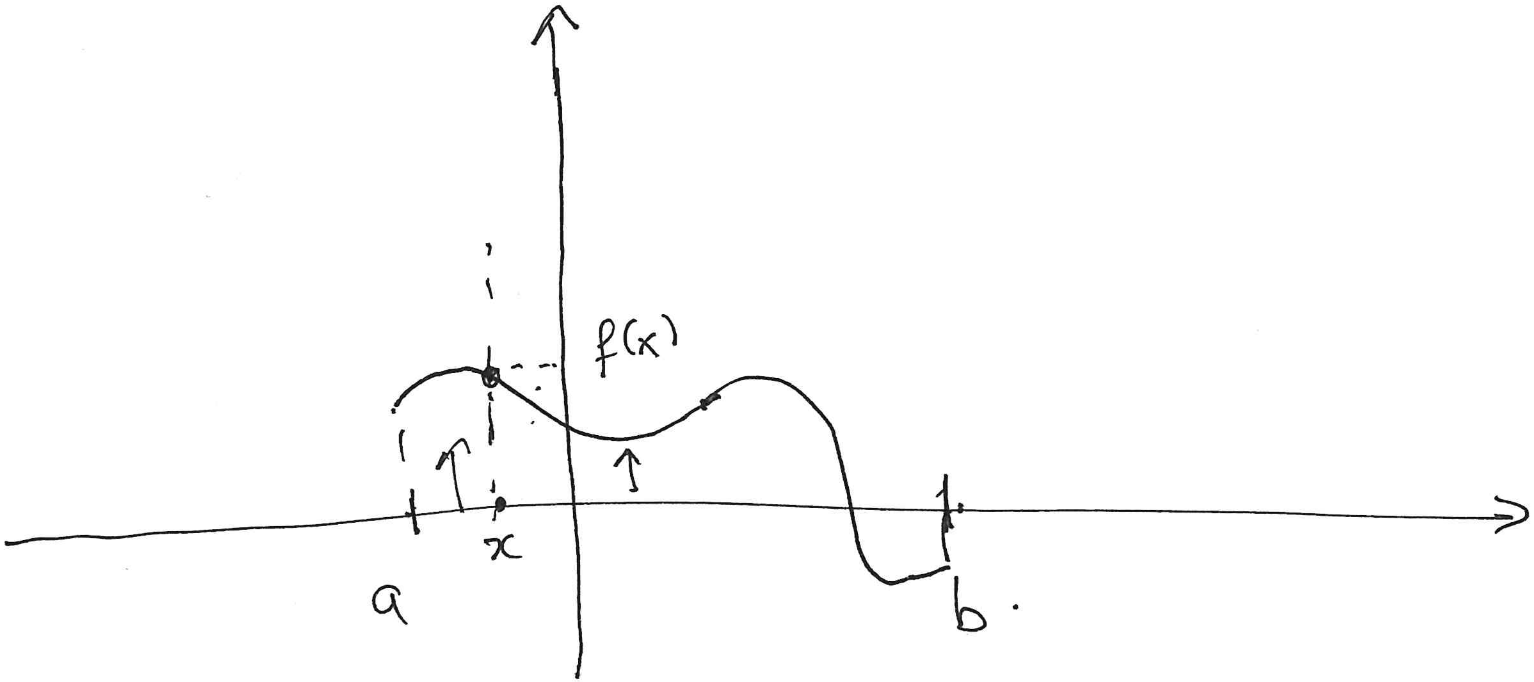
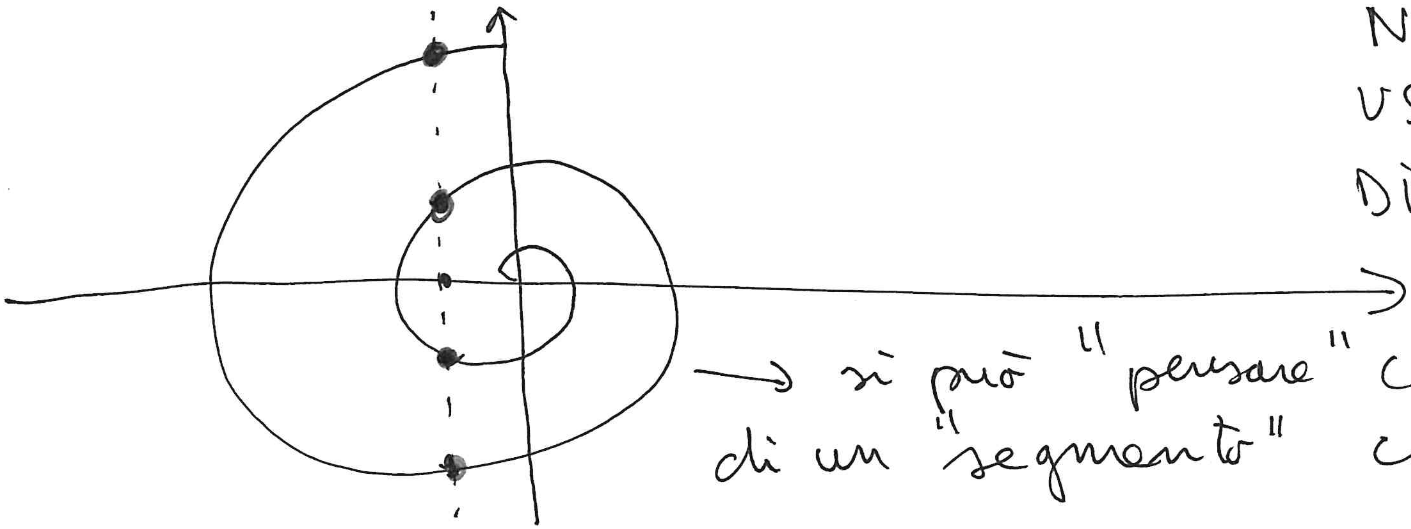


Grafico di funzione continua definita in [a, b].

Intervallo è un segmento di retta.

$x \in [a, b] \to f(x) = y$

$(x, f(x))$

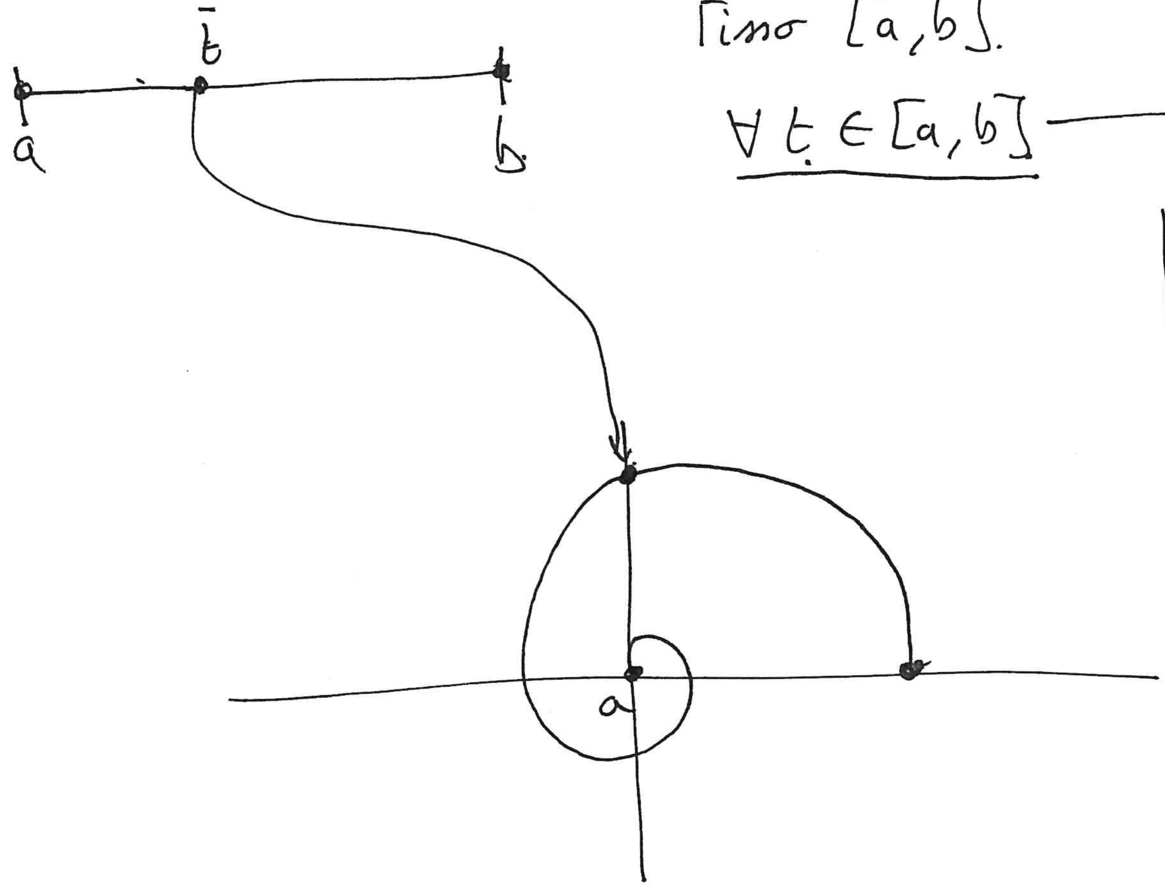


NON SI PUÒ USARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

→ si può "pensare" come la deformazione di un "segmento" cioè di un intervallo.

Fisso $[a,b]$.

$\forall t \in [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t)) = P(t) \in \mathbb{R}^2$



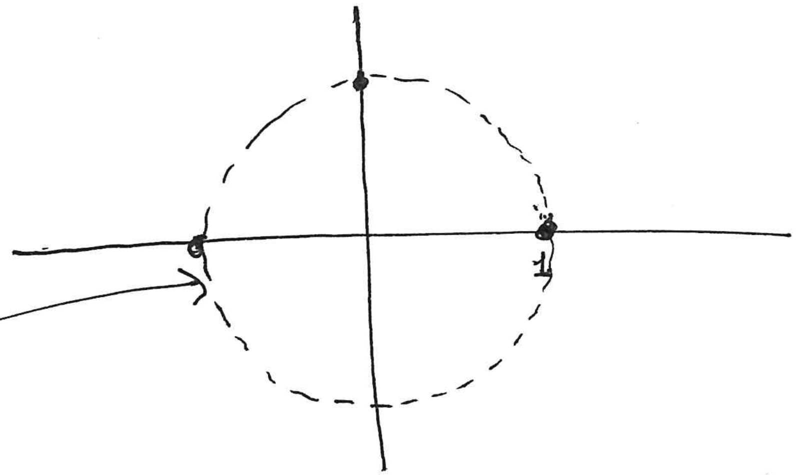
Esempio 1:

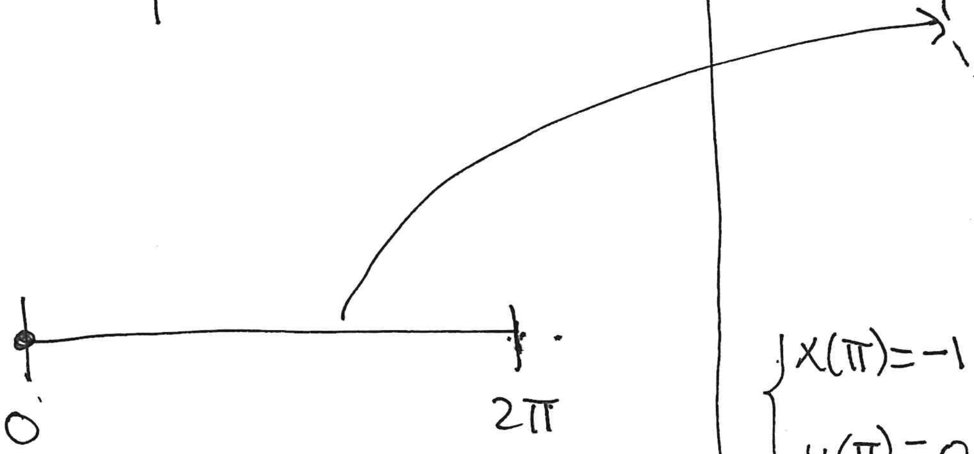
$t \in [0, 2\pi] \longrightarrow (\cos t, \sin t)$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

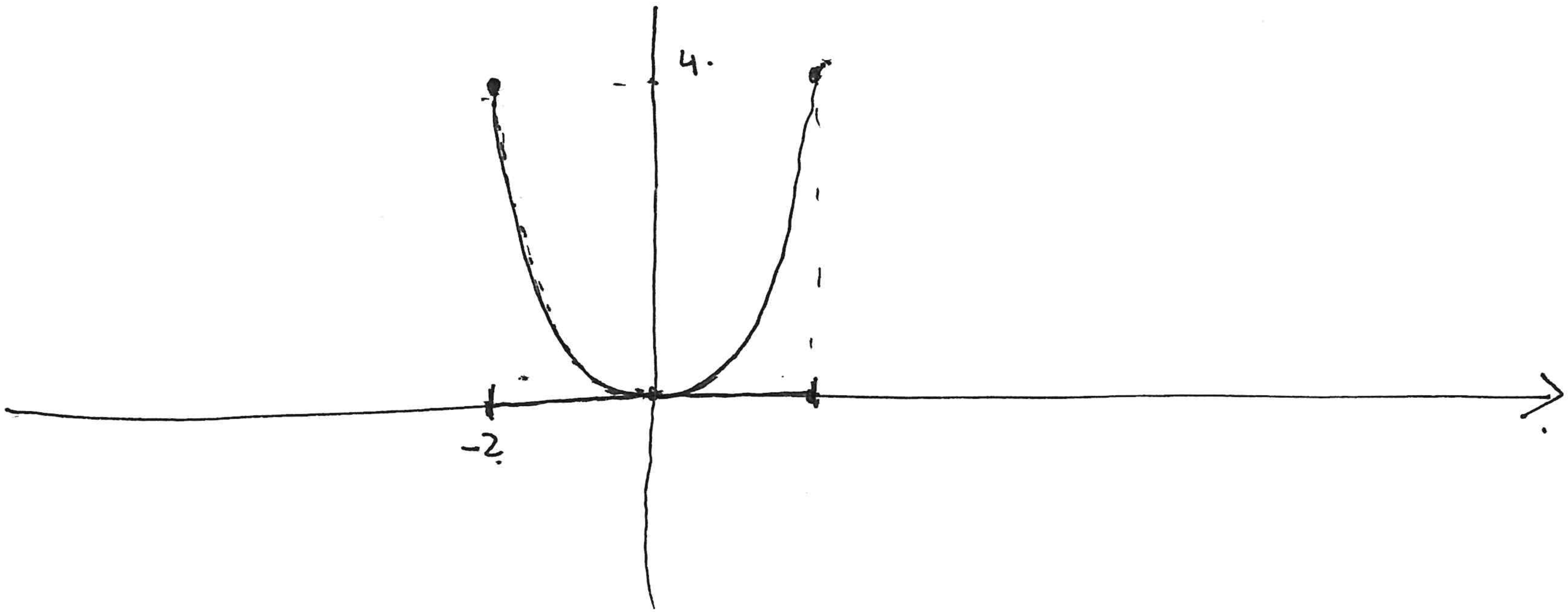




$$\begin{cases} x(\pi) = -1 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Esempio 2: $t \in [-2, 2] \longrightarrow (t, t^2) = P$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \text{grafico di } x^2.$$



$t \in [a, b] \longrightarrow (t, f(t)) \rightarrow$ La curva è il grafico della funzione f ristretta all'intervallo $[a, b]$.

IV

Esempio 3

$t \in [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) = P \in \mathbb{R}^3$

$\varphi : t \in [0, 2\pi] \longrightarrow \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{\cancel{2}}\right).$

$2.$

$t = 0$

$\downarrow$

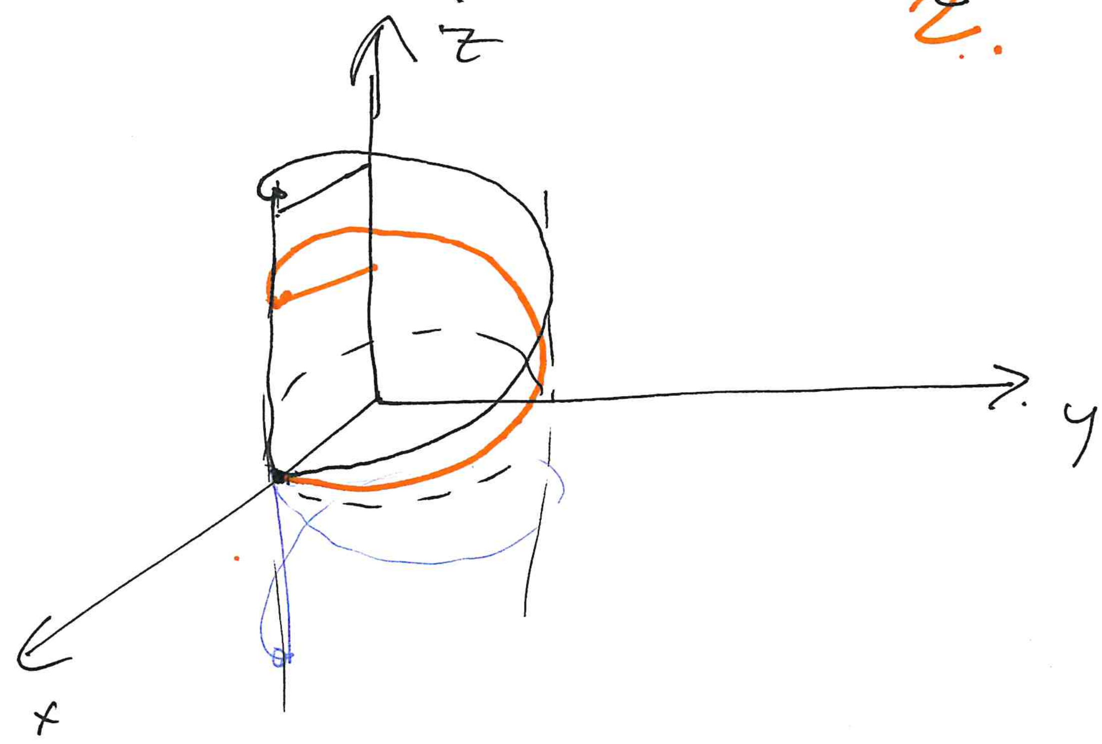
$(1,0,0)$

$t = 2\pi$

$\downarrow$

$(1, 0, 2\pi)$

$(1, 0, \pi)$



$t \in [0, 2\pi] \longrightarrow (\cos t, \sin t, -t).$

Definizione Funzione da $[a,b]$ intervallo chiuso di $\mathbb{R}$
in $\mathbb{R}^N$, $t \in [a,b] \longrightarrow (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) = P(t)$ dove
$x_i(t)$ per $i=1,\ldots,N$ sono funzioni continue e definite
in $[a,b]$.

Se $N=2 \longrightarrow t \longrightarrow (x_1(t), x_2(t)) \equiv (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

Curva piana

Se $N=3 \longrightarrow t \longrightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \equiv (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$

Curva nello spazio.

Proprietà elementari delle curve.

Definizione Curva chiusa: $P(a) = P(b)$.

$\xrightarrow{N=2} (x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$

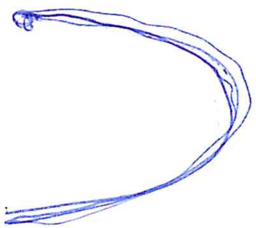
$\xrightarrow{N=3} (x(a), y(a), z(a)) = (x(b), y(b), z(b))$

Es 1: $t \to (\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$

$P(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$.
$P(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$.
chiusa

$t : [0, 3\pi] \longrightarrow (\cos t, \sin t)$.

$P(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$
$P(3\pi) = (\cos 3\pi, \sin 3\pi) = (-1, 0)$.
NON È CHIUSA.



$t \in [0, 4\pi] \to (\cos 2t, \sin t)$

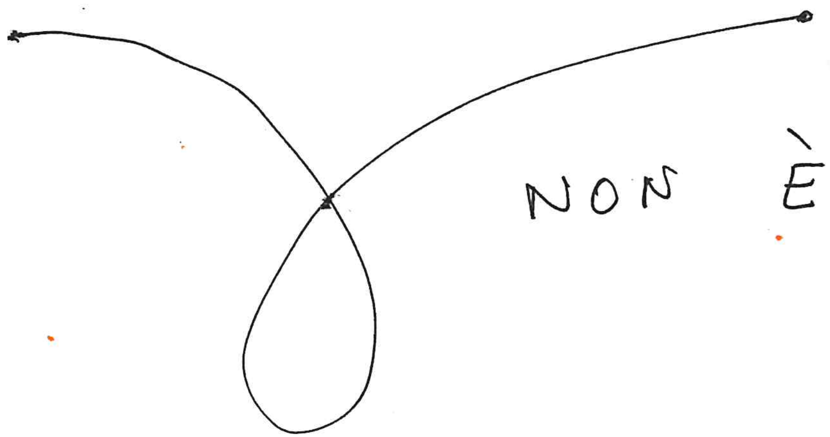
$P(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$
$P(4\pi) = (1, 0)$.
chiusa

Curva semplice

Una curva $t \in [a,b] \to P(t)$

se $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow P(t_1) \neq P(t_2)$.

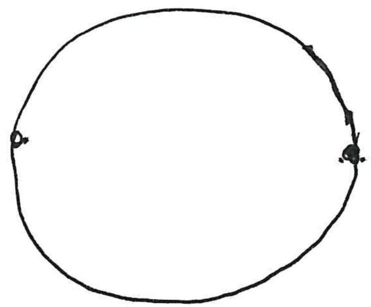
$\forall t_1, t_2 \in (a,b)$



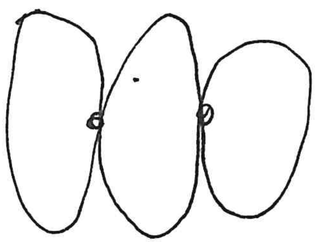
NON È SEMPLICE

$t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$

semplice



$t \in [0, 2\pi] \to (\cos 10t, \sin 11t)$



$t \in [0, 3\pi] \to (\cos t, \sin x)$

non è semplice.

Definizione equivalente di Curva semplice $\forall$

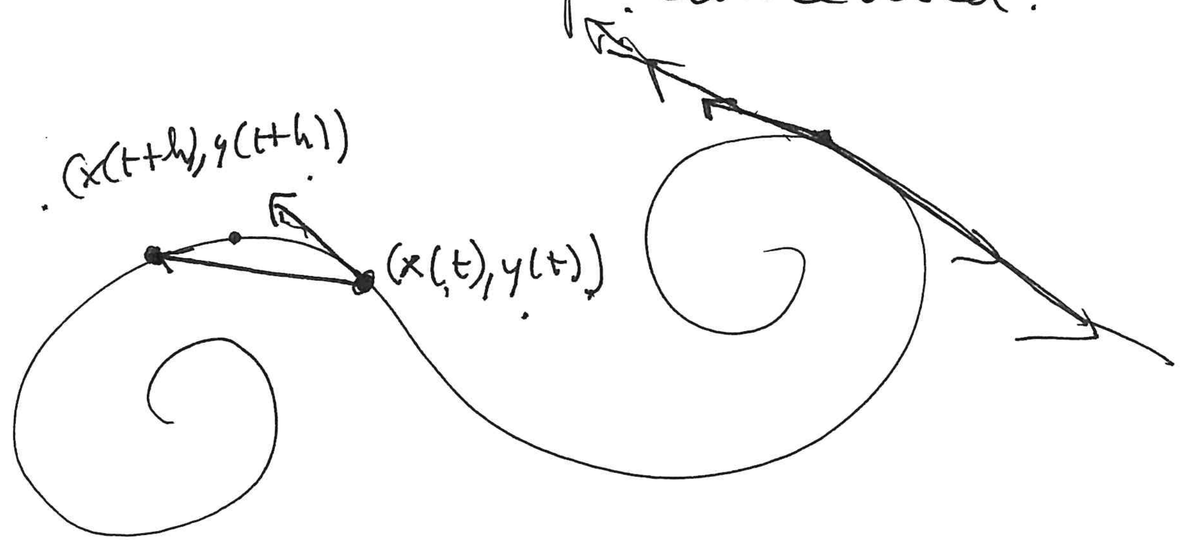
è $P(t_1) = P(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$. $\forall\, t_1, t_2 \in (a,b)$.

Definizione Sostegno di una curva sono i punti $P \in \mathbb{R}^N$ t.c. $\exists\, t \in [a,b]\ P = P(t)$.

$$t : [a,b] \longrightarrow (x_1(t), \dots, x_N(t)) = P(t).$$

P_0 è nel sostegno della curva se esiste $\bar{t} \in [a,b]$ t.c. $P(\bar{t}) = P_0 = (x_1(\bar{t}), \dots, x_N(\bar{t}))$.

Vettore tangente alla curva parametrica.



$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right), \lim_{h\to 0}\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)\right)$$

se $x(t)$ e $y(t)$ sono <u>derivabili</u> allora

$$= (x'(t), y'(t)).$$

Se $\underline{(x'(t), y'(t))} \neq (0,0) \Longrightarrow \vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ è il vettore tangente, "vettore velocità".

$|v(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + (y'(t))^2}$ è il modulo della velocità "quanto IX vado veloce" cioè "quanto" va veloce la particella che ha come moto la curva parametrica $t: [0, 1] \longrightarrow (x(t), y(t))$

$(x'(t), y'(t))$ è vettore velocità

$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ è la "velocità"

nel senso tachimetro.

Definizione

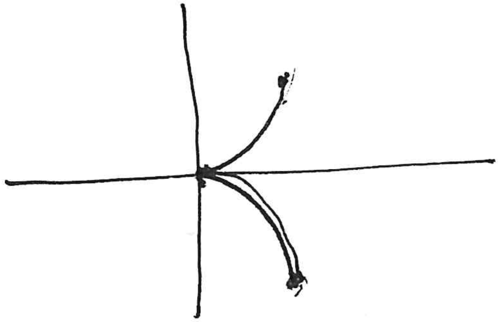
Curve regolari

1) se $x_i(t)$ sono derivabili $\forall i = 1, \dots, N$
$\forall t \in (a, b)$.

2) $v(t) = (x_1'(t), \dots, x_N'(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$.
$\iff |v(t)| \neq 0 \quad \forall t$

Una curva è regolare se sono verificate le condizioni 1) e 2).

$t \in [-1,1] \longrightarrow (t^2, t^3)$. $\longrightarrow v(t) = (2t, 3t^2)$. $\nexists$ X



<u>oss</u> $v(0) = (0,0)$

La curva <u>non</u> è regolare. perché esiste un punto $t=0$ t.c. $|v(0)| = 0$ quindi non $\exists$ un vettore tangente in $(0,0) = P(0)$.

$t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$ è regolare?

$v(t) = (-\sin t, \cos t)$. $|v(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 \neq 0$.

Curva è <u>regolare</u>!

$t \in [0, 4\pi] \longrightarrow (\cos 2t, \sin t)$. è regolare ?

XI

$$v(t) = (-2\sin 2t, \cos t).$$

$$\begin{cases} \cos t = 0 \to t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \\ -2\sin 2t = 0 \end{cases}$$

$$-2\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\pi = 0$$

$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0) \longrightarrow$ la curva non è regolare.

Una curva è regolare a tratti se può essere scomposta in un numero finito di curve regolari

Esempio $\gamma(t) = (t^2, t^3)$

$t \in [-1,1] \longrightarrow (t^2, t^3)$

$\longrightarrow \gamma_1(t) = (t^2, t^3) \quad t \in [-1, 0]$

$\longrightarrow \gamma_2(t) = (t^2, t^3) \to t \in [0, 1]$

$\gamma'(0) = v(0) = (0,0)$.

$0 \in (-1,1)$.

Definizione Se γ è una curva regolare $[a,b] \to \mathbb{R}^N$. XII

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \begin{cases} \xrightarrow{N=2} \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \\ \xrightarrow{N=3} \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \\ \xrightarrow{N} \displaystyle\int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_N'(t)^2}\,dt \end{cases}$$

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$.

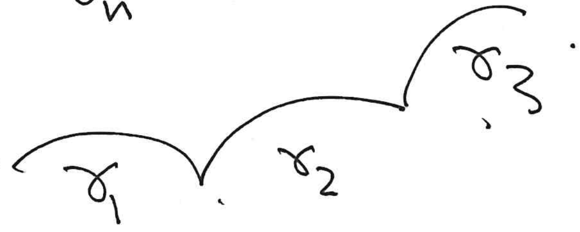
$|\gamma'(t)| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = \sqrt{R^2} = R$.

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} R\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Se γ è regolare a tratti cioè

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n$$

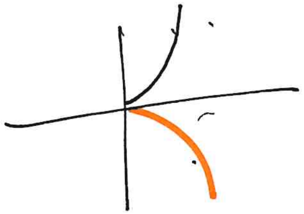
allora $L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} L(\gamma_i)$.



$\gamma(t) = (t^2, t^3)$. per $t \in [-1, 1] \longrightarrow \gamma_1(t) = (t^2, t^3) \quad t \in [-1, 0]$

$\gamma_1'(t) = (2t, 3t^2)$

$\gamma_2(t) = (t^2, t^3), \quad t \in [0, 1]$

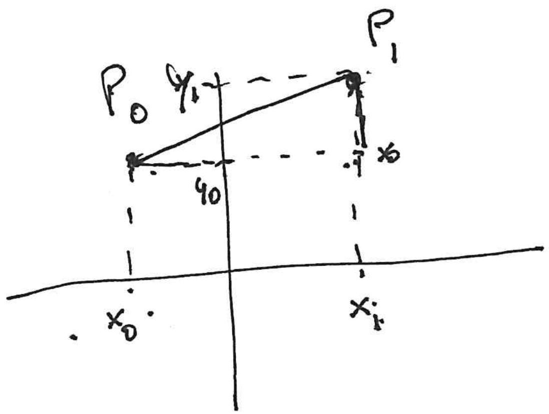


$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt + \int_{0}^{1} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt.$$

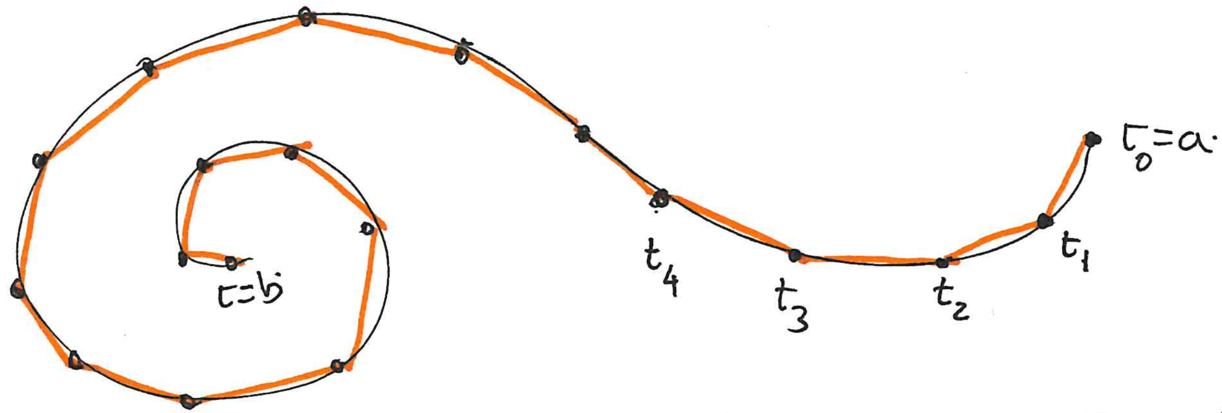
$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2[4 + 9t^2]}\, dt + \int_{0}^{1} \sqrt{t^2(4 + 9t^2)}\, dt.$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

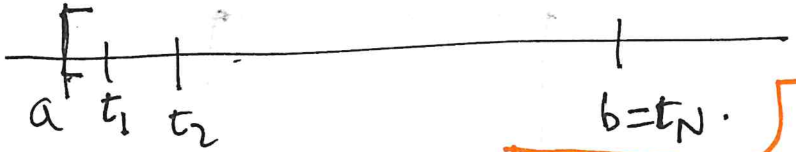


$$\overline{P_0P_1} = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$t : [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t))$$



$$\overline{P(t_{i+1})\,P(t_i)} = \sqrt{\left(x(t_{i+1})-x(t_i)\right)^2+\left(y(t_{i+1})-y(t_i)\right)^2}$$



$$\boxed{L_N = \sum_{i=1}^{N} \overline{P(t_{i+1})P(t_i)}} = \lim_{N\to+\infty} L_N$$

Lunghezza della spezzata per i punti $P(t_1), \ldots, P(t_N)$.

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2 + (y(t_{i+1})-y(t_i))^2}}{(t_{i+1}-t_i)} \right) \cdot (t_{i+1}-t_i).$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sqrt{ \Bigg(\underbrace{\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i}}_{\text{rapporto Incrementale}} \Bigg)^2 + \Bigg(\underbrace{\frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{t_{i+1}-t_i}}_{\text{rapporto Incrementale}} \Bigg)^2 } \right) \cdot (t_{i+1}-t_i).$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sqrt{x'(T_i)^2 + y'(T_i)^2} \right) \cdot (t_{i+1}-t_i) \xrightarrow{N \to +\infty} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

dove ho imbrogliato?

$$= \int_{-1}^{1} -t\sqrt{4+9t^2}\,dt + \int_{0}^{1} t\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

$\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{4+9t^2}$ Calcoliamo $\int t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \frac{1}{18}\int \sqrt{s}\,ds$

$\cancel{t}$

$$s = 4+9t^2 \qquad = \frac{1}{18} s^{3/2} = \frac{1}{18}\left(\sqrt{4+9t^2}\right)^3$$

$$ds = 18t\,dt$$

$$\frac{1}{18}ds = t\,dt$$

$$\sqrt{s} = s^{1/2} \longrightarrow \frac{s^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} s^{3/2}$$

$$-\frac{1}{18}(4+9t^2)^{3/2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{18}(4+9t^2)^{3/2}\Big|_{0}^{1} = \frac{(13)^{3/2}}{9} - \frac{(4)^{3/2}}{9}$$