Prova Scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in fisica (L-Z) 12.9.96

1. Studiare al variare del parametro reale α il limite della successione

$$a_n = (1 + \sin\frac{\alpha}{n})^n.$$

2. Studiare al variare del parametro reale α la convergenza (semplice e assoluta) della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)(2\alpha - 3)^k}{\sqrt{k+2}}.$$

3. Dimostrare con un opportuno criterio che esiste l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

e successivamente calcolarlo.

4. Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2+4)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

i) si dimostri che f è invertibile in $(0, +\infty)$;

ii) se ne disegni il grafico (almeno qualitativamente: è sufficiente aver risolto anche la sola prima parte dell'esercizio 3);
iii) se $g = f^{-1}$, si calcoli $g'(0)$.

5. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{1}{1+|x|^n} & x \in [2n\pi, 2(n+1)\pi], \\ \frac{1}{1+|x|^n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

6. Sia $f \geq 0$ una funzione continua definita in $(0,1)$; supposto che esista $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = 2$, si provi (ragionando in un intorno di x_0) che

$$\lim_n \int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x = +\infty.$$