Compito di Analisi Matematica II del 17/2/1995
Prof. G. M. Troianiello
Correzione

Esercizi

1. Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^5/[(y-x^2)^2+y^4] & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nell'origine.

Risposta:

In ogni intorno di $(0,0)$ cadono tutti i punti (x,x^2) con $|x|>0$ sufficientemente piccolo, e su di essi f diventa la funzione $f(x,x^2) = x^{-3}$ che *non ammette limite* per $x \to 0$ (mentre tende a $\pm\infty$ per $x \to 0^{\pm}$). Dunque $f(x,y)$ non è continua nell'origine.

2. Calcolare il volume del solido delimitato in alto dalla sfera $x^2+y^2+z^2=3$ ed in basso dal cono $x^2+y^2-z^2=0$.

Risposta:

Si passa alle coordinate sferiche. Con l'angolo ϕ definito da $z=\rho\sin\phi$ l'equazione del cono diventa $\rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi$, cioè $\phi=\pi/4$, e il solido viene ad essere definito dalle disuguaglianze $0 \le \rho \le \sqrt{3}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$. Il suo volume è dunque $2\pi\sqrt{3}(1-\sqrt{2}/2)$.

3. Calcolare l'integrale curvilineo della forma $\omega = [y - y/(x^2-2xy+2y^2)]\mathrm{d}x + x/(x^2-2xy+2y^2)\mathrm{d}y$ su una qualunque curva regolare semplice e chiusa γ che abbia per sostegno l'insieme $\{(x,y)|\, x^2+(y-2R)^2 = R^2\}$ e sia percorsa nel verso antiorario.

Risposta: La cironferenza sostegno di γ sta nel semipiano $y>0$ o $y<0$ a seconda che R sia >0 o <0 (caso questo che può benissimo verificarsi!) Nel semipiano in questione ω è somma di una forma chiusa, dunque dotata di integrale curvilineo su γ uguale a 0, e della forma $y\mathrm{d}x$, il cui integrale su γ vale $\int_0^{2\pi}(2R+R\sin\theta)(-R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = -\pi R^2$.

4. Risolvere il sistema

$$x_1' = 2x_1 + x_3, \quad x_2' = x_1 + x_3, \quad x_3' = x_1 - 2x_2$$

e trovare un a per il quale la soluzione del sistema che verifica la condizione di Cauchy

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = a$$

risulti periodica.

Risposta:

La matrice A dei coefficienti del sistema ha per polinomio caratteristico $(2-\lambda)(\lambda^2+1)$. I suoi autovalori sono dunque: 2 con autovettore $(2,1,0)$, i con autovettore $(1,1+i,-2+i)$ e di conseguenza (senza bisogno di fare nessun altro calcolo) $-i$ con autovettore $(1,1-i,-2-i)$. L'integrale generale del sistema a valori in $\mathbf{C}^3$ è $c_1e^{2t}(2,1,0)+c_2e^{it}(1,1+i,-2+i)+c_3e^{-it}(1,1-i,-2-i)$; per i nostri scopi non c'è bisogno di andare a calcolare l'integrale generale a valori in $\mathbf{R}^3$, cosa che peraltro si farebbe in un attimo mediante l'identità di Eulero. Per ottenere la soluzione del problema di Cauchy dobbiamo imporre le condizioni $2c_1+c_2=2$, $c_1+c_2+c_3=0$, $-2c_2+c_3=a$; perchè essa sia periodica deve valere l'ulteriore condizione $c_1=0$, che è compatibile col precedente sistema se e solo se $a=-6$.

5. Calcolare la matrice hessiana della funzione

$$f(x,y)=\int_0^{x+y} te^{-t}dt.$$

Risposta:

Senza bisogno di calcolare l'integrale indefinito (peraltro immediato) di te^{-t} ci si può accontentare di applicare la regola di derivazione delle funzioni composte: poichè $f(x,y)=F(x+y)$ con $F(u)=\int_0^u te^{-t}dt$ si ha $f_x(x,y)=f_y(x,y)=(x+y)e^{-(x+y)}$, $f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=[1-(x+y)]e^{-(x+y)}$.

Problema

Nel corso di tutto il problema $\theta>0$ è fissato e $\phi(t)$ denota la funzione $\mathbf{R}\ni t\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi itx}\,dx$.

1. Dimostrare che $\phi(0)=(2\pi\theta)^{1/2}$.

Risposta:

Basta tener conto che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}$ e operare il cambiamento di variabile $y=x/(2\theta)^{1/2}$.

2. Dimostrare che la somma della serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2\theta}$ (cioè $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2\theta}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(x+k)^2/2\theta}$) è una funzione $f(x)$ di classe C^1 su $[0,1]$ con $f(0)=f(1)$, e che per $m\in\mathbf{Z}$ il suo m–esimo coefficiente di Fourier (sotto forma complessa) su $[0,1]$ vale $\phi(m)$.

Risposta:

La serie delle derivate è $-\frac{1}{\theta}\sum_{k=0}^{\infty}(x-k)e^{-(x-k)^2/2\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}(x+k)e^{-(x+k)^2/2\theta}$. Essa converge totalmente (ad una funzione che è di conseguenza continua su $[0,1]$) perchè è maggiorata termine a termine da una serie numerica convergente: per ogni $x \in [0,1]$ e $k \in \mathbf{N}$ risulta infatti $|x-k|e^{-(x-k)^2/2\theta} \leq ke^{-(k-1)^2/2\theta}$, $(x+k)e^{-(x+k)^2/2\theta} \leq (1+k)e^{-k^2/2\theta}$. (Che una serie numerica quale $\sum ke^{-k^2/2\theta}$ converga può ormai essere considerata una banalità.) Ne segue che in $[0,1]$ la serie di partenza è derivabile termine a termine, dunque di classe C^1, se in più converge essa stessa almeno in un punto. Ma questo è vero senz'altro in $x=0$: già che ci siamo notiamo anche che la sua somma in 0, cioè $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2/2\theta}$, coincide con $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(k-1)^2/2\theta}$, cioè con la sua somma in 1, perchè è del tutto equivalente che si sommi da $-\infty$ a ∞ facendo variare l'indice k o l'indice $k-1$.

Per il calcolo del coefficiente di Fourier, diciamo c_m, ci serviamo della convergenza totale ad $f(x)$ della serie di partenza, che segue subito dalle disuguaglianze $e^{-(x-k)^2/2\theta} \leq e^{-(1-k)^2/2\theta}$, $e^{-(x+k)^2/2\theta} \leq e^{-k^2/2\theta}$ per $0 \leq x \leq 1$ e $k \in \mathbf{N}$. Possiamo infatti integrare per serie:

$$c_m = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-(x-k)^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx.$$

Che c_m sia $=\phi(m)$ segue adesso, siccome $e^{2\pi imk}=1\ \forall k \in \mathbf{Z}$, dalle identità

$$\int_0^1 e^{-(x-k)^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx = \int_0^1 e^{-(x-k)^2/2\theta}e^{-2\pi im(x-k)}\,dx = \int_{-k}^{-k+1} e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx :$$

infatti $\phi(m)$ è uguale (o per la definizione di integrale improprio o per il teorema di Lebesgue applicato alla successione delle funzioni $\chi_{[-N,N]}(x)e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi imx}$) a

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N-1}\int_{-k}^{-k+1} e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-k}^{-k+1} e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi imx}\,dx.$$

3. Dimostrare, giustificando i passaggi, che per ogni t la derivata $\phi'(t)$ esiste e vale $Kt\phi(t)$, con $K=-4\pi^2\theta$.

Risposta:

La funzione $e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi itx}$ è per ogni t sommabile rispetto ad $x \in \mathbf{R}$ ed ha per ogni x derivata rispetto a t data da $(-2\pi ix)e^{-x^2/2\theta}e^{-2\pi itx}$, dunque maggiorata in valore assoluto dalla funzione $2\pi|x|e^{-x^2/2\theta}$ che è sommabile rispetto ad $x \in \mathbf{R}$ ed indipendente da t. Possiamo derivare sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\phi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) e^{-x^2/2\theta} e^{-2\pi i t x}\, dx.$$

Per ogni N naturale integriamo per parti

$$-2\pi i \int_{-N}^{N} x e^{-x^2/2\theta} e^{-2\pi i t x}\, dx = 2\pi i [\theta e^{-x^2/2\theta} e^{-2\pi i t x}]_{-N}^{N}$$

$$-2\pi i \int_{-N}^{N} \theta(-2\pi i t) e^{-x^2/2\theta} e^{-2\pi i t x}\, dx$$

e facciamo tendere N all'∞ (giustificando di nuovo tale passaggio come nel passo precedente): al primo membro troviamo $\phi'(t)$ ed al secondo $-4\pi^2\theta t\phi(t)$.

4. Utilizzare il problema di Cauchy soddisfatto da ϕ per calcolare $\phi(m)$.

Risposta:

Siccome $\phi'(t) = -4\pi^2\theta t\phi(t)$ e $\phi(0) = (2\pi\theta)^{1/2}$ dev'essere $\phi(t) = (2\pi\theta)^{1/2} e^{-2\pi^2 t^2 \theta}$, dunque $\phi(m) = (2\pi\theta)^{1/2} e^{-2\pi^2 m^2 \theta}$. (E qualcuno che si sbagliasse, trattando il coefficiente variabile t come se fosse costante, non avrebbe che da guardare il passo successivo per rendersi conto dell'errore!)

5. Dimostrare l'identità (di Jacobi)

$$(2\pi\theta)^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 m^2 \theta} e^{2\pi i m x}.$$

Risposta:

In $[0,1]$ la funzione $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2\theta}$ è di classe C^1 con valori uguali agli estremi. Dunque essa è il limite uniforme della sua serie di Fourier $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi(m) e^{2\pi i m x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2\pi\theta)^{1/2} e^{-2\pi^2 m^2 \theta} e^{2\pi i m x}$.