Analisi Matematica II

Corso Birindelli, Falcone A.A. 1994/95

Foglio di Esercizi n.3: Curve, superfici, integrali curvilinei e superficiali.

1. Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma (x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}) d\,s,$$

dove

$$\gamma : \begin{cases} t \\ \log t \end{cases}$$

per $t \in [1, e]$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ rappresentare graficamente la curva chiusa:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2 = 0\},$$

e calcolarne la lunghezza.
(Suggerimento: usare le coordinate polari).

3. Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma(A,B)} \frac{x - \log y}{(1 + 4x^2)^{1/2}} d\,s,$$

essendo $\gamma = (x, x^2)$, $A = (1/2, 1/4)$ e $B = (1, 1)$.

4. Sia $R > 0$ e sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da $(x(t), y(t), z(t)) = (R\cos t, R\sin t, t)$ per $t \in [-2\pi, 2\pi]$.
(a) Calcolare la lunghezza di γ;
(b) calcolare:

$$\int_\gamma x y^2 z d\,s;$$

(c) dimostrare che se $f = f(x, y, z)$ é tale che $f(x, -y, -z) = -f(x, y, z)$, allora:

$$\int_\gamma f(x,y,z)d\,s = 0$$

.

5. Si calcoli, se possibile, l'integrale curvilineo:

$$\int_\gamma (x+\frac{1}{y})\frac{d\,s}{\sqrt{1+4(x-1)^2}},$$

essendo γ l'arco della parabola $y=(x-1)^2$ compreso tra $A=(0,1)$ e $B=(2,1)$.

6. Si calcoli l'integrale superficiale di funzione:

$$I=\int_S \sqrt{1-x^2y^2}d\,\sigma,$$

dove S è la superficie definita da $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(\cos u,\sin v,\sin u+\cos v)$ con $(u,v)\in D=\{(u,v):0\le u\le \pi/2, 0\le v\le \pi/2\}$.

7. Sia una curva ϕ di classe C^2 parametrizzata dalla sua lunghezza s si dimostri che $\phi'(s)\phi''(s)=0$

8. Sia la curva l data dalle equazioni $g(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$ for $t\in[0,2\pi]$. Trovare la tangente in $t=0$, in $t=2\pi$, le coordinate del baricentro ($x_i=\frac{1}{|l|}\int_l x_i(t)dt$)) e il momento d'inerzia rispetto al punto $x_o=(0,0,\pi)$ ($\int_l |x(t)-x_o|^2dt$).

9. Sia $f(x,y)=1-x^2-2y^2$. Si trovino le curve di livello del grafico di f e se ne determinino le lunghezze al variare del livello.

10. Data $y=\sqrt{x}$, $z=\frac{1}{8}\log x$. Determinare la lunghezza d'arco avente per estremi $(1,1,0),(e,\sqrt{e},\frac{1}{8})$

11. Si consideri l'intersezione della superficie sferica $x^2+y^2+z^2=r$ con il cilindro $x^2+y^2-rx\le 0$. Se ne calcoli l'area.

12. Rappresentare graficamente la curva $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$. Dire se la curva è semplice, determinare le coordinate del baricentro.

13. Studiare la curva

$$\phi : \begin{cases} t^2 - t \\ 2t^3 - 3t^2 + t \end{cases}$$

per $t \in \mathbb{R}$. La curva e' semplice? e' regolare? Disegnare il supporto della curva.

14. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$. Dare una rappresentazione parametrica della curva $\Gamma = \partial E$ e scrivere il versore normale alla curva. Si tratta di una curva regolare?

15. Si calcoli la lunghezza dell'arco congiungente il punto (1,-1) al punto (1,1) lungo la curva di equazione $y^2 = x^3$.

16. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = e^x$ per $x \in [1, 2]$.

17. Si considerino le curve

$$\phi : \begin{cases} cos\, t, & t \in [0, \pi] \\ sin\, t \end{cases}$$

$$\psi : \begin{cases} cos\, |t|, & t \in [-\pi, \pi] \\ sin\, |t| \end{cases}$$

$$\gamma : \begin{cases} cos\, t^2, & t \in [0, \sqrt{\pi}] \\ sin\, t. \end{cases}$$

ϕ e ψ sono equivalenti? ϕ e γ sono equivalenti?

18. Calcolare

$$\int_C (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$$

dove C è l'ellisse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ percorsa una volta in senso antiorario.

19. Calcolare

$$\int_C (x + y)\mathrm{d}s$$

dove C è il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ percorso in senso antiorario.

20. Calcolare l'area della parte della superficie $z^2 = 2xy$ che si trova sopra il primo quadrante del piano xy ed è limitata dai due piani $x = 2$ e $y = 1$.

21. Calcolare l'area del paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$ limitata dal piano $y = a$.