Equazioni Differenziali

I° ORDINE

Problemi di Cauchy
$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Variabili Separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (*)$$

L'incognita è una funzione: $y(x)$ → Ins. di def. → legge.

a) se $\exists\ \bar{y} \in \mathbb{R}$ t.c. $g(\bar{y}) = 0$

allora $y(x) = \bar{y}$ è soluzione costante $\forall x$ t.c. $(*)$ è ben definita

$$y'(x) = 0 \quad \forall x \quad , \quad f(x) \cdot g(\bar{y}) = 0$$

b) $g(y) \neq 0 \longrightarrow$
$$\boxed{\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)}$$

Separato le variabili

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

risolvere l'integrale

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = H(y)\Big|_{y=y(x)} = H(y(x))$$

$y = y(x)$

$dy = y'(x)\,dx$

$$\boxed{H(y(x)) = F(x) + c}$$

Sono sparite le derivate
$\downarrow$
risolvere in y

$$\boxed{y(x) = H^{-1}[F(x)+c]}$$

$\forall c$ t.c. sia definita H^{-1}

Esercizio

$$\begin{cases} y' = 2x\, y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Eq. variabili separabili $f(x) = 2x$

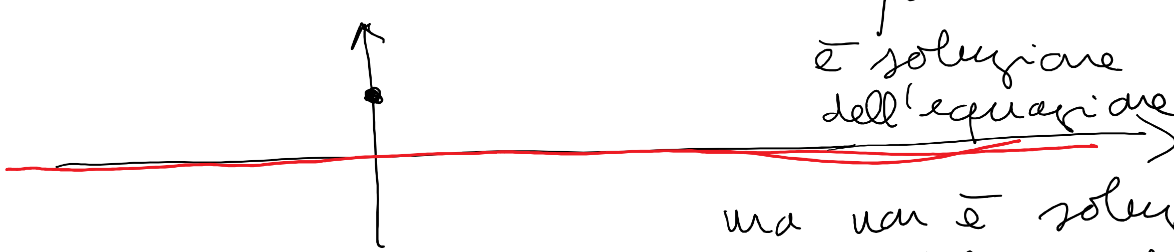
$g(y) = y^2$

a) $g(y) = 0 \Longrightarrow y^2 = 0 \Longrightarrow \bar{y} = 0$

$\Downarrow$

$y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

è soluzione dell'equazione diff.



ma non è soluzione del problema di Cauchy

b) $y \neq 0 \qquad y' = 2x\, y^2 \longrightarrow \boxed{\dfrac{y'}{y^2} = 2x}$

b) $y \neq 0$ $\quad y' = 2x\, y^2 \longrightarrow \boxed{\dfrac{y'}{y^2} = 2x}$

$$\int 2x\, dx = x^2 + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int y^{-2}\, dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1}$$

$$= -y^{-1} = \frac{-1}{y(x)}$$

$y = y(x) \qquad y'(x)\,dx = dy$

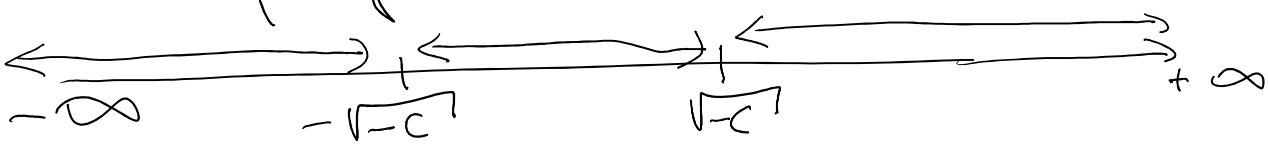
$$\left(\int t^{\alpha}\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1 \right)$$

$$\boxed{-\frac{1}{y(x)} = x^2 + c} \xrightarrow{\text{Risolvere}}$$

$$\boxed{\frac{-1}{x^2 + c} = y(x)}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzione

$\forall c \in \mathbb{R}$ e per ogni intervallo in cui è definito $\frac{-1}{x^2+c}$, $y(x) = -\frac{1}{x^2+c}$ è soluzione dell'equazione differenziale



$$y(0)=1 \Longrightarrow \frac{-1}{0^2+c}=1 \Longrightarrow -\frac{1}{c}=1$$

$$\boxed{c=-1}$$

$$\boxed{y(x)=-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}}$$ definita in $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$

ma $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy nell'intervallo $(-1,1)\ni 0$

Equazioni del 1° ordine lineari:

$$\boxed{y'=a(x)y+b(x)}$$

1° oss Se $b(x)\equiv 0 \to y'=a(x)y$ a variabili separabili

Risolviamo $\boxed{y'=a(x)y} \to$ $y(x)\equiv 0$; $y(x)\neq 0$

$$\frac{y'}{y}=a(x) \Longrightarrow \int \frac{y'}{y}\,dx=\int a(x)\,dx = A(x)+c$$

$$\frac{y'}{y} = a(x) \implies \int \frac{y'}{y}\,dx = \int$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} \cdot dx \underset{y=y(x)}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$$

$$\log|y| = A(x) + c \implies |y| = e^{A(x)+c} = e^c e^{A(x)}$$

$$y(x) = e^c e^{A(x)} \qquad y(x) > 0$$

oppure

$$y(x) = -e^c e^{A(x)} \qquad y(x) < 0$$

In conclusione $\boxed{y(x) = c_1 e^{A(x)}}$ $\forall c_1 \in \mathbb{R}$

(se $c_1 = 0 \to y(x) \equiv 0$, $c_1 > 0 \to y(x) = e^c e^{A(x)}$
$c_1 < 0 \to y(x) = -e^c e^{A(x)}$)

$\boxed{A(x) = \int a(x)\,dx}$ $\to$ $(A'(x) = a(x))$

2°) $b(x) \neq 0$ $\qquad y' = a(x)\,y + b(x)$

Variazione della costante,

$\boxed{y(x) = c(x) e^{A(x)}}$ $\to$ Cerchiamo $c(x)$?

$$y'(x) = c'(x) e^{A(x)} + \underbrace{c(x) e^{A(x)}} \cdot a(x) \overset{?}{=} a(x) \cdot y + b(x)$$

$$y'(x) = C'(x)e^{A(x)} + \underbrace{C(x)e^{A(x)}}_{y} \cdot a(x) \doteq a(x) \cdot y + b(x)$$

$$\Downarrow$$

$$C'(x)e^{A(x)} = b(x) \to C'(x) = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = \int e^{-A(x)} b(x)\,dx + C_1$$

$$\boxed{y(x) = C(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + \underline{\underline{C_1 e^{A(x)}}}_{\text{sol. eq. omog.}}}$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

$$\downarrow$$

$$y' - a(x)y = b(x$$

Esercizio: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y(x)}{x} + e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$x = 1 > 0$

$$y' = -\underline{y(x)} + e^x$$ equazione lineare

$y' = a(x)y + b(x)$

$a(x) = -\frac{1}{x} \qquad b(x) = e^x$

$$\boxed{A(x)} = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\log|x| = \boxed{-\log x}$$

$x > 0$

$$y(x) = e^{\boxed{A(x)}} \cdot \int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx + c_1 e^{\boxed{A(x)}}$$

$$\int e^{-(-\log x)} \cdot e^x\,dx = \int e^{\log x} e^x\,dx = \int x e^x\,dx$$

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x$$

$$y(x) = e^{-\log x}\left[x e^x - e^x\right] + c_1 e^{-\log x}$$

$(a \log b = \log b^a)$

$$e^{-\log x} = e^{\log x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x}\left[x e^x - e^x\right] + c_1 \cdot \frac{1}{x} = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{c_1}{x}}$$

$y(x)$ è soluzione per $x > 0$

Per trovare la soluzione del problema di Cauchy

$\boxed{y(1)=2}$ Calcolare $y(1)$ usando l'espressione trovata che risolve l'equazione differenziale poi imporre che sia uguale a 2

$$y(1)=e^1-\frac{e^1}{1}+\frac{c_1}{1}=2 \implies c_1=2$$

La soluzione del pb. di Cauchy è

$$y(x)=e^x-\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x} \qquad \underline{\underline{\forall x\in(0,+\infty)}}$$

$$\int x^\alpha\,dx \doteq \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha\neq-1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)}$$

$$\int f(\ldots)\ldots \quad a$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

I x parti
$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy}$$

Int. per sostituzione $\quad x = \varphi(y)$

Equazioni differenziali del 2° ordine:

Lineari a coef. costanti:

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f funzione continua

a) $f(x) \equiv 0 \longrightarrow y'' + by' + cy = 0$

$y(x) = e^{\lambda x} \qquad y'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y$

$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 y$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + b\lambda + c = 0} \quad \underline{\text{eq. caratteristica}}$$

1°) $\boxed{b^2 - 4c > 0}$

$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \lambda_1$

$\neq$

$\lambda = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \lambda_2$

$$\Longrightarrow \quad y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

sol. in tutto $\mathbb{R}$

2°) $\boxed{b^2 - 4c = 0} \longrightarrow \lambda = -\frac{b}{2}$ sol. unica

$$y_0(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{b}{2}x} = e^{-\frac{b}{2}x}(C_1 + C_2 x)$$

3°) $\boxed{b^2 - 4c < 0}$ → non ci sono soluzioni reali all'eq. caratteristica le soluzioni sono complesse.

$$\lambda = \underbrace{-\frac{b}{2}}_{\exp} + \underbrace{\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}}_{\text{trig.}} i$$

$$y_0(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{b}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} x\right)$$

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)$$

2°) $y'' + by' + cy = f(x)$ (*)

↳ si trovano le soluzione $y''+by'+cy=0$

$y_0(x) = c_1 \ldots$

si trova una soluzione y_p particolare di

l'insieme delle soluzione è dato

da $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

y_p può essere determinato usando il metodo delle somiglianze.

Se "f" è di un certo tipo $\Rightarrow$ "y_p" è dello stesso tipo

$f(x)$ è polinomio $\longrightarrow$ y_p è un polinomio

$f(x)$ è un exp $\longrightarrow$ y_p è un exp.

$f(x)$ è trigonometrica $\longrightarrow$ y_p è trigonometrica.

$f(x)$ è "Pol. exp" o "Pol. trig" lo sarà y_p.

"Se y_p trovato in questo modo è soluzione ... $\Rightarrow$ si moltiplica ...

se y_p ...

dell'equazione omogenea $\Longrightarrow$ si moltiplica per "x".

$$\boxed{y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1}$$

$f(x)$ è un polinomio.

1°) Eq. omogenea $\rightarrow$ $\boxed{y'' - 6y' + 8y = 0}$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$y_0(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$$

2°) Trovare y_p? $\quad f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$f(x)$ è un polinomio di ordine 2

$$\downarrow$$

$$y_p(x) = \underline{ax^2 + bx + c}$$

$\downarrow$ inserire nell'eq.

$$y_p'(x) = \underline{2ax + b}$$

$$y_p''(x) = \underline{2a}$$

$$y_p'' - 6y_p' + 8y_p = 3x^2 + 2x + 1$$

$$2a - 6(2ax + b) + 8(ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$\boxed{\underbrace{8ax^2 + (8b - 12a)x + 8c + 2a - 6b}_{\text{pol. di grad2}} = \underbrace{3x^2 + 2x + 1}_{\text{pol. di grad2}}}$$

$$\begin{cases} 8a = 3 \\ 8b - 12a = 2 \\ 8c + 2a - 6b = 1 \end{cases}$$

$$8a = 3 \longrightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$8b - 12a = 2 \longrightarrow b = \frac{2 + 12a}{8} = \frac{2 + 12 \cdot \frac{3}{8}}{8}$$

$$b = \frac{13}{16}$$

$$8c = 1 + 6b - 2a$$

$$8c = 1 + \frac{39}{8} - \frac{6}{8}$$

$$\boxed{c = \frac{41}{64}}$$

$$y_p(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{13}{16}x + \frac{41}{64}$$

$$\boxed{y(x) = \underbrace{C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}}_{y_0} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{13}{16}x + \frac{41}{64}}$$

$$y''(x) + y(x) = 2\cos x$$

$$\downarrow$$

1°) $y'' + y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -1$

$\lambda = \pm i$

coef reale $= 0$

coef im $= 1$

$$y_0(x) = C_0 \cos x + C_1 \sin x$$

$$y_0'(x) = -C_0 \sin x + C_1 \cos x$$

$$y_0''(x) = -C_0 \cos x - C_1 \sin x = -y_0(x)$$

2°) La sol y_p? $\quad f(x) = 2\cos x$

$$y_p(x) = \underline{\underline{a\cos x + b \sin x}}$$

Attenzione non potrà essere una sol. particolare perché è soluzione dell'equazione omogenea

$$\boxed{y_p(x) = ax\cos x + bx\sin x}$$

$$y_p'(x) = a\cos x + b\sin x - ax\sin x + bx\cos x$$

$$\boxed{y_p'(x) = (a+bx)\cos x + (b-ax)\sin x}$$

$$y_p''(x) = b\cos x - a\sin x + - (a+bx)\sin x + (b-ax)\cos x$$

$$\boxed{y_p''(x) = (2b-ax)\cos x - (bx+2a)\sin x}$$

$$\boxed{y_p''(x) = (2b - ax)\cos x - (bx + 2a)\sin x}$$

$$y_p'' + y_p = (2b - ax)\cos x - (bx + 2a)\sin x + ax\cos x + bx\sin x$$

$$= 2b\cos x - 2a\sin x = 2\cos x$$

La stessa funzione

$$-2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$y_p(x) = x\sin x$$

$$\boxed{y(x) = c_0\cos x + c_1\sin x + x\sin x}$$