Esercizi svolti in aula, 1

I. Birindelli

1) Risolvere le seguenti disequazioni:

$$x|1-x|+x \geq |2x-1|$$

$$|tgx| < 1$$

2) Determinare il sup e inf di

$$B = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}; n \in N, m \in N\}.$$

3) Sia la successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2}$$

si calcolino i valori di a_2, a_3. Si dimostri che esiste il limite di $\{a_n\}$ e se ne determini il valore.

4) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}$$

5) Si dimostri, usando la definizione di limite, che se esiste $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n = 0$$

Se ne deduca che

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{n\pi}{2}$$

non esiste.
1)Dimostrare che

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

ammette almeno una sottosuccessione convergente, trovare il limite di almeno una di esse.

2) Si consideri la funzione definita per ogni $x \in \mathcal{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

dimostrare che f è continua in $x = 1$.
(Facoltativo: si dimostri che f è continua per ogni $x \in \mathcal{R}$.)

3)Calcolare l'integrale della seguente funzione a scala:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} [4\sin x]dx$$

(Suggerimento: per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se $a \leq \sin x \leq b$ allora $\arcsin a \leq x \leq \arcsin b$)

4) Si dimostri che

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}$$

è integrabile in $[1, 2]$.
1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

2) Calcolare la derivata rispetto ad x delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$f_2(x) = e^{x\,\mathrm{tg}x}$$

$$f_3(x) = (\log x)^3$$

$$f_4(x) = \frac{x^p}{x^m - a^m}$$

3) Calcolare la derivata in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{for} x > 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{for} x \leq 0 \end{cases}$$

1) a) Calcolare

$$\int_0^1 x^2(1 - x^2)dx$$

b)Sia

$$B(n, m) = \int_0^1 x^n(1 - x^m)dx$$

Dimostrare con un integrazione per parti che

$$B(n, m) = \frac{n}{m+1} B(n - 1, m + 1)$$

per $n > 1$ e $m \geq 1$.
(Facoltativo: Dedurre da b) che $B(n, m) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$)
2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}}dx$$

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$$

4) Dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ allora $A = \{a_n; n \in N\}$ é un insieme limitato.
Dare un maggiorante e un minorante di A.
1) Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie tale che $a_n \geq 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

2)Verificare che converge

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(\log k)^2}{k}$$

Mostrare che la serie non é assolutamente convergente.

3) Sia $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ una serie a segni alterni dove:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{1}{k^2} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

a) Scrivere le somme parziali S_{2n}.
b) Provare che la serie diverge.
c) Quale ipotesi del teorema di convergenza delle serie a segni alterni non é verificata?

1) Se $\{a_n\}$ é una successione convergente tale che

$$a_n < c \quad \forall n$$

é vero che

$$\lim_{n\to\infty} a_n < c \ ?$$

2)Provare che se f e g sono continue nell'intervallo0 $[a, b]$, allora anche la funzione prodotto $f.g$ é continua in $[a, b]$.

3)Provare che se f e g sono uniformemente continue nell'intervallo $[a, b]$, allora anche la funzione prodotto $f.g$ é uniformemente continua in $[a, b]$.
(Sugg: 1^o modo: usare 2) e un teorema noto *(si spera)*
2^o modo:dimostrare direttamente che l'uniforme continuitá del prodotto dipende dall'uniforme continuitá di f e g.)

4)Sia f derivabile in un intervallo $]a, b[$

1. Provare che se $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$, allora f é costante,
2. Provare che se $f'(x) = c, \forall x \in]a, b[$, dove c é una costante e se $f(x_o) = 0$ per allora $f = c(x - x_o)$.

1) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle sulle funzioni continue. Dedurne il Teorema di Lagrange.
2) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per la convergenza di una serie a termini positivi.
3)Sia $f(x)$ una funzione continua assegnata au R.

Trovare una funzione $u(x)$ su R tale che

$$(*) \begin{cases} u'(x) = f(x)u(x) & \text{per ogni } x \in R \\ u(o) = 1 \end{cases}$$

Mostrare che una tale $u(x)$ e' unica.