Analisi Matematica II

Corso Birindelli, Falcone A.A. 1994/95

Foglio di Esercizi n.6: Forme differenziali, formule di Green e Stokes.

1. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

definita in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Si dimostri che:
(a) ω é chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$;
(b) se ω é ristretta al semipiano $\{x > 0\}$ allora é esatta, e se ne determini una primitiva;
(c) per ogni curva chiusa α in $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\alpha \omega,$$

é un intero.

2. Si consideri la forma differenziale:

$$\omega = \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}y.$$

Dire se ω é esatta e calcolare:

$$\int_{\partial Q^+} \omega,$$

con $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, $0 < a < b$, $0 < c < d$.

3. Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ la seguente forma differenziale é chiusa:

$$\omega = \frac{C_1 y^\alpha}{(x^2 + y^2)^\beta}\mathrm{d}x + \frac{C_2 x^\alpha}{(x^2 + y^2)^\beta}\mathrm{d}y.$$

Per ogni forma chiusa di questo tipo calcolare:

$$\int_{S^1} \omega,$$

dove $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Dato il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $V = V(x, y, z) \equiv (yz, xz, y^2x^2)$, calcolare, applicando il teorema di Stokes:

$$\int_S (\nabla \times V, n) \mathrm{d}\sigma,$$

dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.

5. Applicando le formule di Gauss-Green, calcolare l'area delimitata dalla curva $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2 + x^3, -1 \leq x \leq 0\}$.

6. Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale $w = (xy^2 + x, y - x^2y)$ nell'aperto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

7. Si dimostri che la seguente forma differenziale lineare

$$-\frac{x^2y^4}{4}\mathrm{dx} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^{xy} e^{-t\xi^2}\right]_{t=0} \mathrm{dy}$$

é esatta sul piano e determinare la generica primitiva.

8. Determinare un aperto convesso del piano contenente il punto $(1, 1)$ nel quale sia definita la forma differenziale

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2y}\mathrm{dx} - \frac{x^2 + y^2}{xy^2}\mathrm{dy}$$

Calcolare le primitive della forma differenziale nel convesso trovato.

9. Calcolare

$$\int_{\partial D} \frac{y}{x + y + 1}dx + \frac{x}{x + y + 1}dy$$

dove $D = \{(x, y)$ tali che $x \geq 0,\ y \geq 2x,\ y \leq 1\}$.

10. Determinare $\beta(y)$ tale che $\beta(1) = 0$ e tale che la seguente forma differenziale

$$\beta(y)\cos x dx + [\frac{y}{(y^4-1)^{\frac{1}{2}}}\sin x + \frac{y^2}{y^2+1}dy$$

risulti esatta in $D = \{(x,y)$ tali che $y > 1\}$:

Determinare inoltre, la primitiva della forma cosí ottenuta tale che $F(0,\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.

11. Dire se la seguente forma differenziale é esatta nel suo insieme di definizione e calcolarne una primitiva:

$$\omega = [1 + \cos(x+y)]dx + \cos(x+y)dy$$

Calcolare poi l'integrale di ω esteso alla curva cosi definita $x = \cos^{47} t$, $y = \sin^{47} t$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

12.

Si consideri

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad F(x,y,z) = (x^3, y^2, z)$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \phi(x,y,z) = \frac{x^4}{4} + \psi(y) + \frac{z^2}{2}$$

dove ψ é una funzione C^1.

- Determinare ψ in modo tale che $\nabla\phi = F$.

- Dato il cammino Γ definito dalla funzione

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\sqrt{2\pi - t}\cos t, \sqrt{2\pi - t}\sin t, t)$$

  Calcolare l'integrale su Γ della forma differenziale $F_1 dxdx + F_2 dy + F_3 dz$.

13. Dire se la forma differenziale $\omega = (y^2\cos x + z^3)\mathrm{d}x - (4 - 2y\sin x)\mathrm{d}y + (3xz^2 + 2)\mathrm{d}z$ è esatta e calcolare, eventualmente, la sua primitiva.

14. Dire se la forma differenziale $\omega = (2xe^y + y)\mathrm{d}x + (x^2e^y + x - 2y)\mathrm{d}y$ è esatta e calcolare, eventualmente, la sua primitiva.

15. Sia:

$$\omega = \frac{3y - x}{(x+y)^3}\mathrm{d}x + \frac{y - 3x}{(x+y)^3}\mathrm{d}y.$$

Determinare l'insieme di definizione e la primitiva $F(x,y)$ tale che $F(0,1) = 2$.

16. Determinare il volume del solido delimitato dal piano xy, dal paraboloide $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ e dal cilindro $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ dove a, b sono due parametri reali positivi.

17. Sia $P(x,y) = x\mathrm{e}^{-y^2}$, $Q(x,y) = -x^2y\mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$. Calcolare

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

dove Cè la frontiera del quadrato di lato $2a$ centrato nell'origine.

18. Sia $\omega = x(3x - 2y)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y$. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_C \omega$ dove C è il tratto della spirale di equazione $r = 2\theta$ (in coordinate polari) compreso tra l'origine e $(0, \pi)$.

19. Calcolare l'area della figura delimitata dell'asteroide

$$\gamma : \begin{cases} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{cases}$$

20. Applicando la formula di Stokes calcolare

$$\int_C x\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z$$

dove C è la curva di equazioni $x(t) = a\sin(t)$, $y(t) = a\cos(t)$, $z(t) = a(\sin(t) + \cos(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$ e $a > 0$. Verificare il risultato integrando direttamente.

21. Sia S la superficie del cubo unitario $K = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y\ le 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e sia n la normale unitaria interna di S. Calcolare

$$\int\int_S F \cdot n\mathrm{d}s$$

dove $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e definita come $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

22. Sia $F(x, y, z) = (y, z, x)$ ed S sia la parte del paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ corrispondente a $z \geq 0$. Calcolare

$$\int\int_S (\text{rot } F) \cdot n \mathrm{d}s.$$

23. Dimostrare che:

$$\int\int_S (\nabla \times A) \cdot n \mathrm{d}S = 0,$$

per qualsiasi superficie chiusa S (n=normale esterna ad S).