Esercizi su integrali

1. Si provi che $f(x) = 0$ è l'unica soluzione di classe C^1 del problema:

$$\begin{cases} (f'(x))^3 = & f(x) - \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt \\ f(0) = 0, & f(2) = 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Suggerimento : Si ragioni sui punti di massimo e minimo assoluto di una soluzione in $[0, 2]$.

2. Data la funzione $G(x) = \int_0^x [2\cos t]dt$ in $[0, \pi]$,

i) se ne studi la derivabilità;

ii) se ne scriva un'espressione esplicita;

iii) se ne tracci il grafico.

N.B. [.] indica la parte intera.

3. Si ricavi un'espressione esplicita della funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t)^{[1+\sin t]}\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt \qquad \text{in }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

N.B. [.] indica la parte intera.

4. Data la funzione

$$h(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt,$$

i) si verifichi che è finita per ogni x, cioè che l'integrale improprio è convergente per ogni x;

ii) si provi, ragionando per induzione, l'uguaglianza $h(n) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$, $[a, b]$ un qualsiasi intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Si calcoli

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(x)\sin(\alpha x)\,dx.$$

6. Si calcoli

$$\int_{\log\pi+\log 2}^{\log\pi+\log 4} |e^{3x}\sin e^x|\,dx.$$

7. Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione

$$x^4 - \int_0^{x^2} t e^{-|t^3|}\, dt = 2.$$

e se ne determini il segno .

8. Dato l'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx,$$

i) si dimostri, senza calcolarlo, che è convergente;
ii) se ne calcoli il valore.

9. Si calcoli

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, \mathrm{tg}^2 x \, dx.$$

10. Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x t^{-t}\, dt,$$

si dimostri che è limitata nel suo insieme di definizione e, dopo aver fatto lo studio del I e del II ordine, se ne tracci un grafico qualitativo.

11. Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos x)}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx.$$

12. Si consideri in $[0, \frac{7}{2}\pi]$ la funzione

$$f(x) = \int_0^x \left[\frac{t}{\pi}\right] \sin t\, dt;$$

i. se ne studi la continuitá e la derivabilitá ;
ii. si determinino massimo e minimo assoluto nell'intervallo considerato;
iii. si faccia lo studio del primo e del secondo ordine e se ne disegni il grafico.

13. Si calcoli al variare del parametro α l'integrale

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx.$$

14. Sia $f \geq 0$ una funzione continua definita in $(0,1)$; supposto che esista $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) > 1$, si provi (ragionando in un intorno di x_0) che

$$\lim_n \int_0^1 f^n(x)\, dx = +\infty.$$

15. Dimostrare con un opportuno criterio che esiste l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\log(x^2+4)}{x^2}\, dx,$$

e successivamente calcolarlo.

16. Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\log(t^2+4)}{t^2}\, dt,$$

i) si dimostri che f è invertibile in $(0, +\infty)$;
ii) se ne faccia lo studio del I e II ordine e se ne disegni il grafico;
iii) se $g = f^{-1}$, si calcoli $g'(0)$.

17. Data la funzione

$$h(x) = \int_1^x \frac{\log(1+t^2)}{t^2}\, dt$$

se ne determinino l'insieme di definizione e gli asintoti.

18. Si faccia lo studio del I e II ordine della funzione dell'esercizio precedente e se ne tracci il grafico .