OTTIMIZZAZIONE

5/11/2021 | I

Trovare massimi e minimi assoluti di una funzione

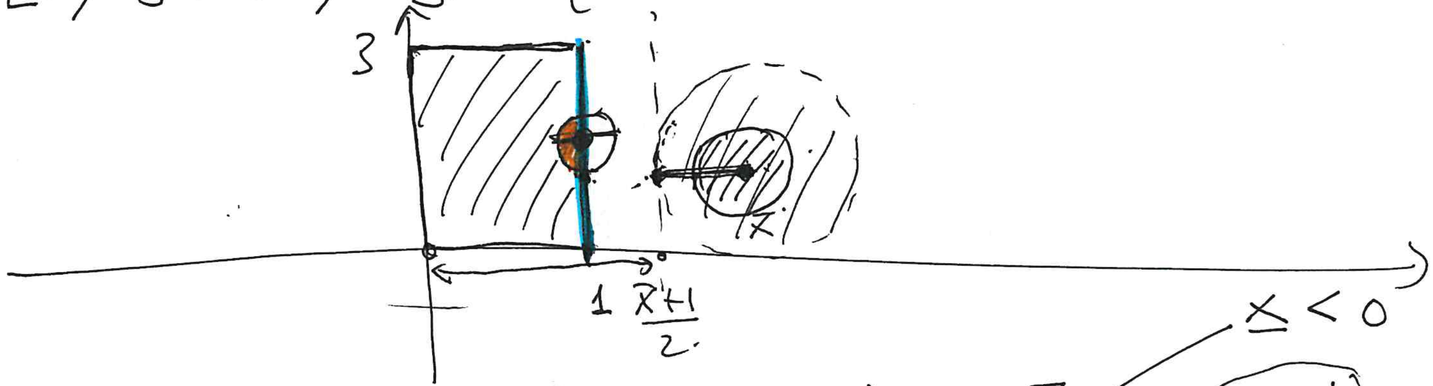
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

~~sul~~ ~~nell~~'insieme D dove D è un insieme chiuso e limitato.

D è chiuso se $\complement D = \mathbb{R}^2 \setminus D$ è aperto

A è aperto se $\forall\, P \in A$ esiste un intorno $I_\delta(P)$ t.c. $I_\delta(P) \subset A$.

$D = [0,1] \times [0,3] = \{(x,y)$ t.c. $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3\}$. CHIUSO



$\underline{P} \in \complement D$ $\quad \underline{P} = (\underline{x}, \underline{y})$. supponiamo $\underline{x} \notin [0,1] \longrightarrow$ $\underline{x} < 0$; $\underline{x} > 1 \longrightarrow \frac{\underline{x}+1}{2} > 1$.

$\cancel{\delta = \frac{\bar{x}+1}{2}}$ $\quad \bar{x} - \frac{\bar{x}+1}{2} = \frac{\bar{x}-1}{2} = \delta > 0$

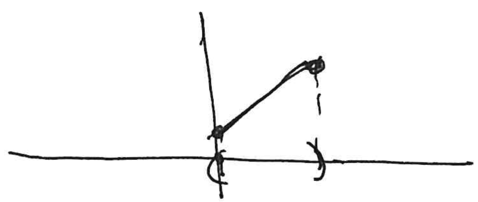
$B_\delta(\underline{P}) \subset \complement D$ infatti $(x,y) \in B_\delta(\underline{P}) \Rightarrow x > 1$.

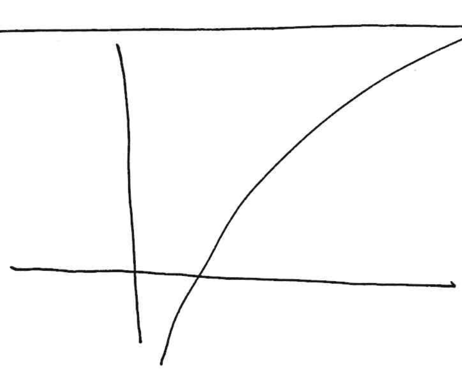
$D = [0,1) \times [0,3] = \{ (x,y)$ t.c. $0 \leq x < 1, \ 0 \leq y \leq 3 \}$

D <u>non è chiuso</u> $\quad \underline{P} = (1,2) \notin D, \ \underline{P} \in \complement D$.

$\forall I_\delta(\underline{P}) \ \exists \ \tilde{P} = (x,2)$ t.c. $0 < x < 1 \Rightarrow \tilde{P} \in D$.

<u>Teorema di Weierstrass</u>: Se f è continua e D è <u>chiuso</u> e <u>limitato</u> allora f ammette massimo e minimo in D.

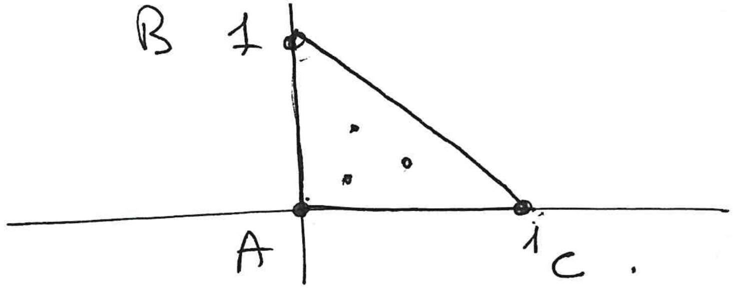


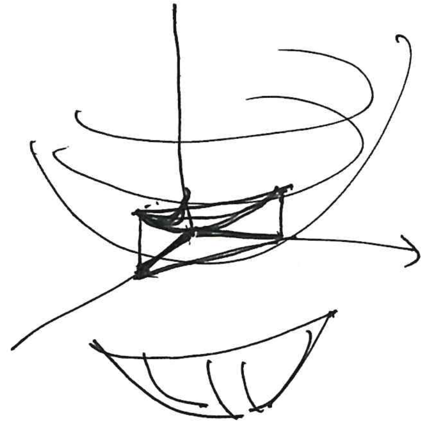


Come procedere per trovare il max e il min di f in D ?

ES: $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 2$.

Il max e il min di f in K, il triangolo di vertici $A=(0,0)$, $B=(0,1)$ e $C=(1,0)$.





$f(P) = \max\limits_K f$ e $\min\limits_K f = f(\bar{P})$

t.c. $f(P) \geq f(x,y)\ \forall (x,y) \in K$ $\quad f(\bar{P}) \leq f(x,y)\ \forall (x,y) \in K$.

I punti estremali possono interni oppure sul bordo di K.

1°) Per trovare i punti estremali interni cerchiamo i punti dove

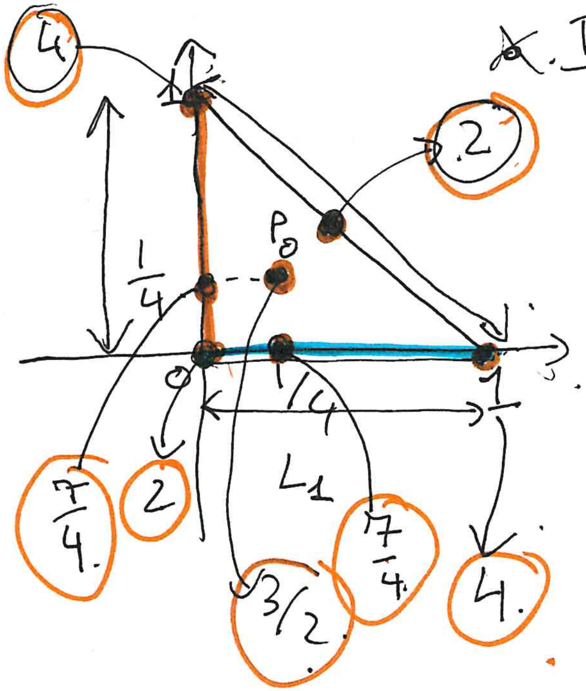
$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

2°) Per trovare i punti estremali sul bordo $\rightarrow$ scrivere f come una funzione di una sola variabile

A. IV

$f(x,y)=4x^2+4y^2-2x-2y+2$.

$K \rightarrow$ Vertici $A=(0,0)$, $B=(0,1)$ e $C=(1,0)$.



1°) Calcoliamo $\nabla f(x,y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x-2=0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y-2=0 \end{cases}$$

$x=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$y=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

f ha un punto critico $P_0=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \in K$.

$$\boxed{f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.}$$

2°) Il bordo di K è costituito da 3 lati:

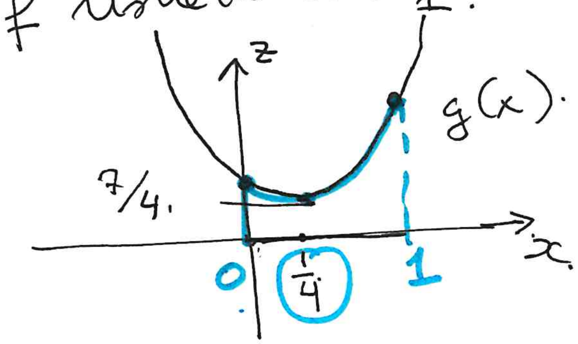
$L_1=\{(x,y)\ y=0,\ 0\le x\le 1\}$. Calcoliamo f ristretta a L_1.

$z=f(x,0)=4x^2-2x+2=g(x)$ con $0\le x\le 1$.

$g'(x)=8x-2$. $g'(x)=0$ $x=\frac{1}{4}$.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=-\frac{1}{4}+2=\boxed{\frac{7}{4}=f\left(\frac{1}{4},0\right)}$.

$\boxed{g(0)=2=f(0,0)}$. $\boxed{g(1)=4=f(1,0)}$



V

$L_2 = \{(x,y),\ x=0,\ 0 \leq y \leq 1\}$

$f(0,y) = \underline{4y^2 - 2y + 2} = g(y) \longrightarrow g(\frac{1}{4}) = f(0,\frac{1}{4}) = \frac{7}{4}$

$g(0) = f(0,0) = 2.$

$g(1) = f(0,1) = 4.$

$L_3 = \{ \boxed{y = -x + 1} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1 \}$

f ristretta a L_3

$$f(x, (-x+1)) = 4x^2 + 4\underbrace{(1-x)}_{y}^2 - 2x - 2\underbrace{(1-x)}_{y} + 2.$$

$$= 4x^2 + 4(x^2 - 2x + 1) - 2x + 2x - 2 + 2.$$

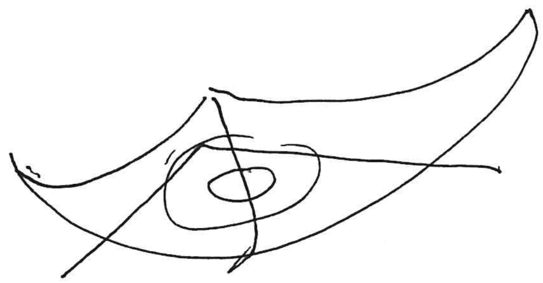
$$= 8x^2 - 8x + 4 = h(x). \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Calcoliamo $h'(x) = 16x - 8 \qquad h'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

$h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 - 4 + 4 = 2 \mid h(0) = f(0,1) = 4, \ h(1) = f(1,0) = 4.$

$$\max_K f = 4 = f(1,0) = f(0,1) \geq \frac{7}{4}$$
$$\geq \frac{3}{2}$$
$$\geq 2$$

$$\min_K f = \frac{3}{2} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) < \frac{7}{4}$$
$$\leq \frac{3}{2}$$
$$\leq 2$$
$$\leq 4.$$

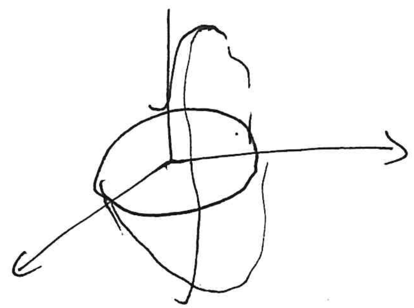


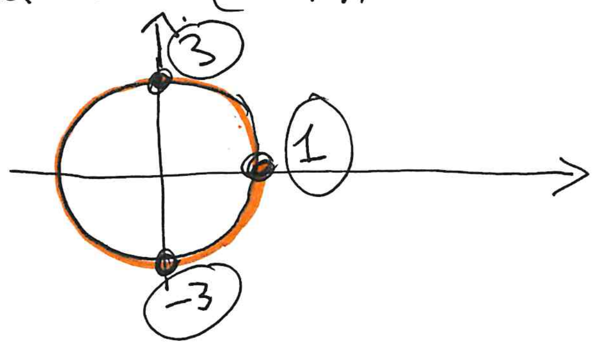
Cercare il max e il min tra tutti i valori trovati.
Il valore più grande è il massimo mentre il valore più piccolo è il minimo.

Altro esempio

$$f(x,y) = x^3 + 3y.$$

Trovare max e min assoluto in $K = \{(x,y) \text{ t.c. } x^2+y^2 \leq 1\}$.





1°) Punti interni critici $\rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \neq 0.$$

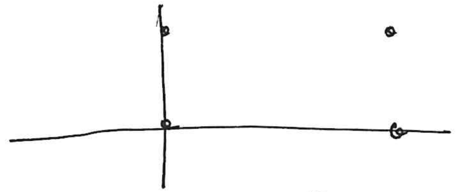
f non ha punti critici $\Longrightarrow$ no massimi o minimi interni.

2°). Studiare f ristretta a $x^2+y^2=1$ che si può parametrizzare con la curva;:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Longrightarrow f(\cos t, \sin t) = \cos^3 t + 3\sin t = g(t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Trovare max e min di $g(t)$ in $[0, 2\pi]$.



$$g(0) = g(2\pi) = 1.$$

$$g'(t) = -3\cos^2 t \sin t + 3\cos t$$

$$= 3\cos t \cdot [-\cos t \sin t + 1] = 0$$

$\cos t = 0 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ $\quad t = \frac{3\pi}{2}$.

$-\cos t \sin t + 1 = 0 \Longrightarrow \cos t \sin t = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2t = 1. \Longrightarrow \boxed{\sin 2t = 2}$

IMPOSSIBILE

$$\sin 2t = 2\cos t \sin t$$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{3}$

$\parallel$

$f(0,1)$.

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \boxed{-3}$.

$\parallel$

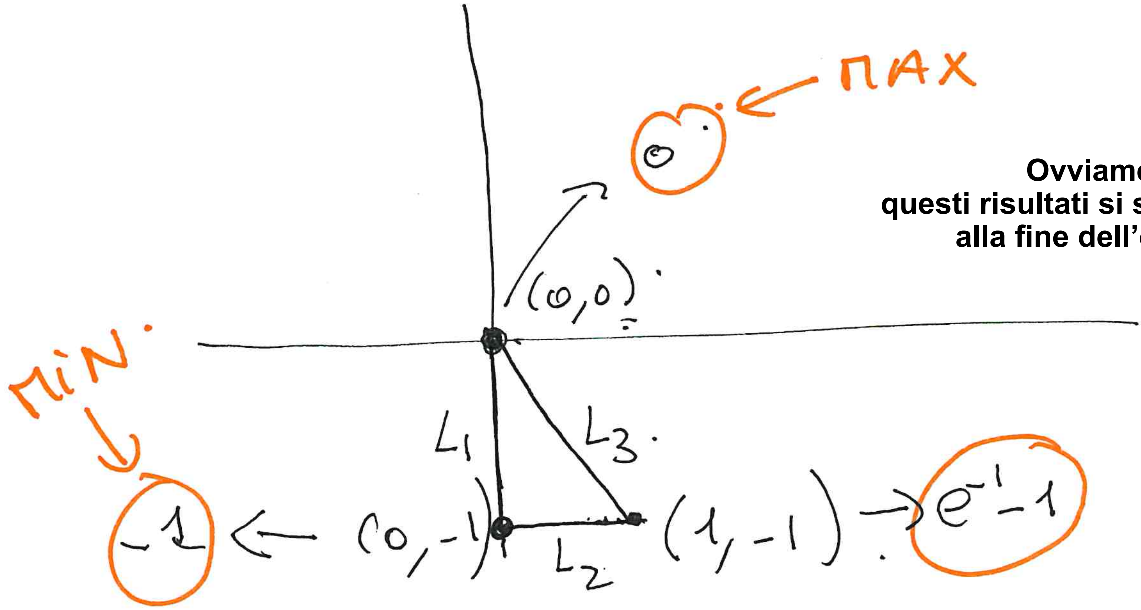
$f(0,-1)$.

$g(0) = f(1,0) = \boxed{1.}$

$\max_K f(x,y) = 3.$

$\min_K f(x,y) = -3.$

$f(x,y)=x^2e^y-y^2$ Trovare max e min in D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$.



Ovviamente questi risultati si sono raggiunti alla fine dell'esercizio

1°) $\nabla f=(0,0)$. $\longrightarrow$ p.t. interni

2°) Restringere f hai bordi del triangoli

1°) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xe^y=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2e^y-2y=0$.

$$\Downarrow$$

$x=0 \longrightarrow -2y=0 \Longrightarrow y=0$.

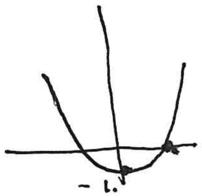
$(0,0)$ è l'unico punto critico $\Longrightarrow \boxed{f(0,0)=0}$.

20) Calcolare f ristretta al lato L_1 e trovarne i max e min.

$L_1 = \{(x,y)$ t.c. $x=0,\ -1\le y\le 0\} \to f(0,y) = -y^2.$ $0\le y\le -1$

$\boxed{f(0,0)=0}$, $\boxed{f(0,-1)=-1.}$

$L_2 = \{(x,y)$ t.c. $y=-1,\ 0\le x\le 1\} \to f(x,-1) = x^2e^{-1}-1.$



$f(0,-1)=-1$ $\boxed{f(1,-1)=e^{-1}-1<0}$

$L_3 = \{(x,y)$ t.c. $y=-x,\ 0\le x\le 1.\}.$

$\downarrow$

$f(x,-x) = x^2e^{-x} - (-x)^2 = x^2e^{-x}-x^2 = g(x)$ $0\le x\le 1$

$g(0)=0$ $g(1)=e^{-1}-1.$

$g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - 2x = x\left[2e^{-x}-xe^{-x}-2\right]$

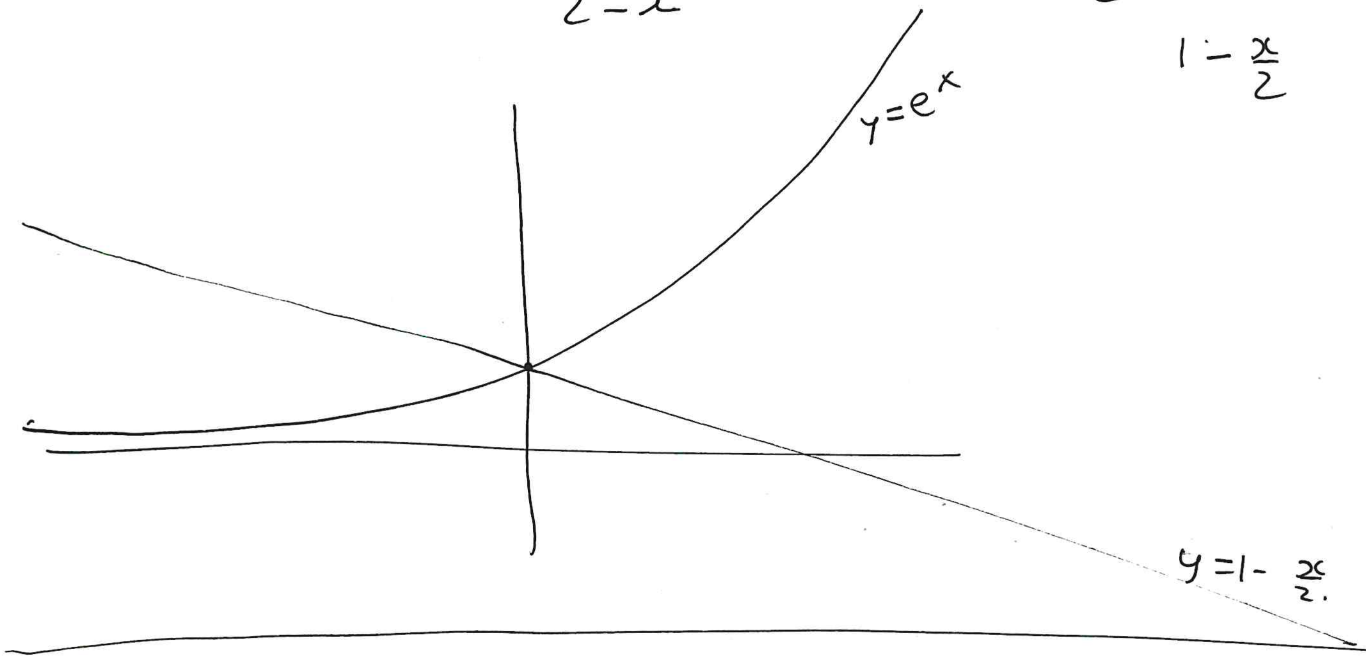
$= x\left[e^{-x}(2-x)-2\right]$

che si annulla per x= 0
oppure per:

$$e^{-x}(2-x)-2=0 \iff x=0$$

$$e^{-x}=\frac{2}{2-x} \iff \frac{2-x}{2}=e^{x}.$$

$1-\frac{x}{2}$



$\max_D f = 0 = f(0,0)$. XI

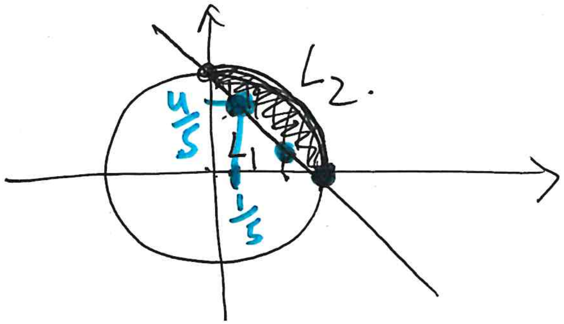
siccome $e^{-1}-1>-1$.

$\min_D f = -1 = f(0,-1)$.

$f(x,y)=\underline{\underline{4x^2+y^2}}\geq 0$ max e min in D

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{x^2+y^2\leq 1}, \underbrace{x+y\geq 1}\}$$

$y\geq -x+1$.



I risultati in celeste sono stati raggiunti alla fine dell'esercizio

1°) $\nabla f(x,y) = (4x,\ 2y)$

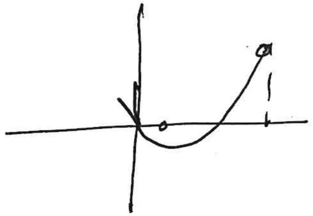
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x = 0 \iff x = 0$ | Ma $(0,0)$ non appartiene a D.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \iff y = 0$

2°) $L_1 = \{(x,y)\ \text{t.c.}\ y = -x+1,\ 0 \le x \le 1\} \longrightarrow$

$\downarrow$

$$f(x, -x+1) = 4x^2 + (1-x)^2 = 4x^2 + 1 - 2x + x^2$$
$$= 5x^2 - 2x + 1 = g(x) \quad 0 \le x \le 1$$



max f.

$g(0) = f(0,1) = 1$, $\quad g(1) = 5 - 2 + 1 = 4 = f(1,0)$.

$g'(x) = 10x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$g(\frac{1}{5}) = f(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}+1) = f(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + 1 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} \longrightarrow$ min f.

$L_2 = \{(x,y),\ x^2+y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\} \longrightarrow (\underset{x}{\underset{\parallel}{\cos t}}, \underset{y}{\underset{\parallel}{\sin t}})$ con $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

Non ci sono punti critici interni di g quindi gli estrmi di g osno agli estremi che abbiamo già calcolato

$f(\cos t, \sin t) = 4\cos^2 t + \sin^2 t = g(t)$ con $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$g'(t) = -8\cos t \sin t + 2 \sin t \cos t = -6 \cos t \sin t = 0$