venerdì 6 novembre 2020 11:46

Funzioni di più variabili
Derivate seconde

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

Se f è derivabile allora possiamo definire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$f \longrightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

∂x ∂y ∂x ∂y

Derivata rispetto ad x

di $\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ derivata seconda rispetto x —

Derivata rispetto ad "y"

di $\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ —

Deriva rispetto ad "x"

di $\frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ —

Derivare rispetto ad "y"

di $\frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ —

Esempio: $f(x,y) = x\, e^{x^2 y}$ prodotto di funzioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 e^{x^2 y} + x \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = (1+2x^2 y) e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^3 e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+2x^2 y) e^{x^2 y}\right) =$$
$$= 4xy \cdot e^{x^2 y} + (1+2x^2 y)\underbrace{e^{x^2 y} \cdot 2xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2 y}\left[4xy + 2xy + 4x^3 y^2\right] = e^{x^2 y}\left[6xy + 4x^3 y\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{(1+2x^2 y)\, e^{x^2 y}}\right) = 2x^2 e^{x^2 y} + (1+2x^2 y) e^{x^2 y} \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left((1+2x^2y)\, e^{x^2y}\right) = 2x^2 e^{x^2y} + (1+2x^2y)e^{x^2y}\cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x^2y}\left[2x^2 + x^2 + 2x^4y\right] = e^{x^2y}\left[3x^2+2x^4y\right]$$

$$\|$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 e^{x^2y}\right] = 3x^2\cdot e^{x^2y} + x^3 e^{x^2y}\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x^2y}\left[3x^2+2x^4y\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 e^{x^2y}\right] = x^3\cdot e^{x^2y}\cdot x^2 = x^5 e^{x^2y}$$

La matrice delle derivate seconde, si chiama matrice HESSIANA

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (x_1, x_2)$

Teorema di Schwarz: Se f è due volte derivabile in D, dominio aperto di esistenza di f, e se le derivate seconde sono continue, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

cioè la matrice Hessiana è simmetrica.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \to$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \to \frac{\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{\Delta f}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$$

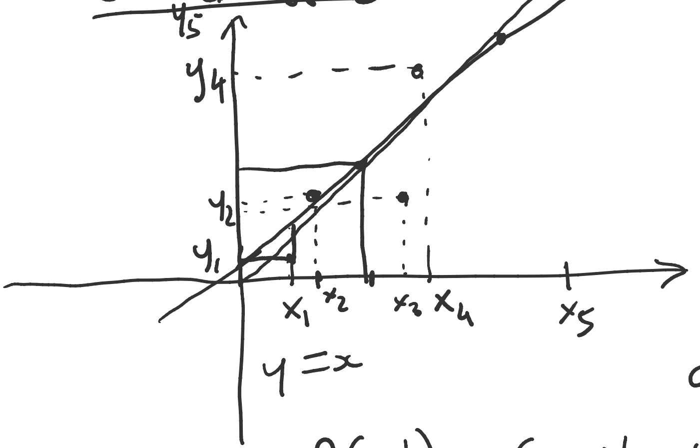
$$= \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) - 2f(x,y)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h,y) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x-h,y)]}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\right] - \left[\frac{f(x,y) - f(x-h,y)}{h}\right]}{h}$$

Ottimizzazione



$P_1 = (x_1, y_1)$

$P_2 = (x_2, y_2)$

$P_3 = (x_3, y_3)$

$$\boxed{y = ax + b}$$

a? e b?

$$f(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + (ax_4 + b - y_4)^2$$

$(1,3)$

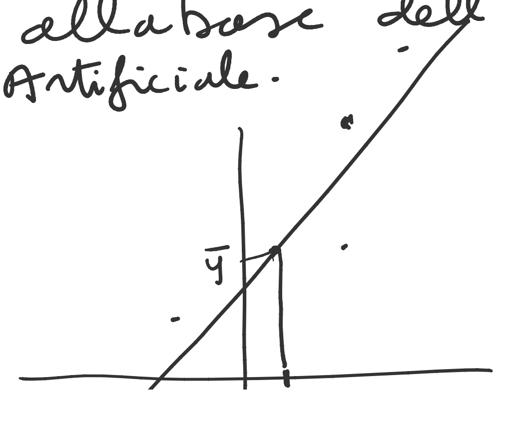
$(1-3)^2 = (2)^2 = 4$

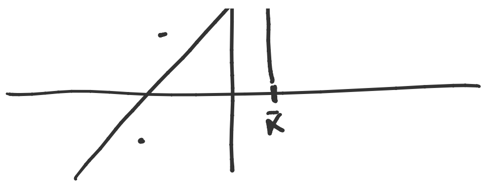
$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f(a,b) \longrightarrow \text{p.to di minimo } (\bar{a}, \bar{b})$$

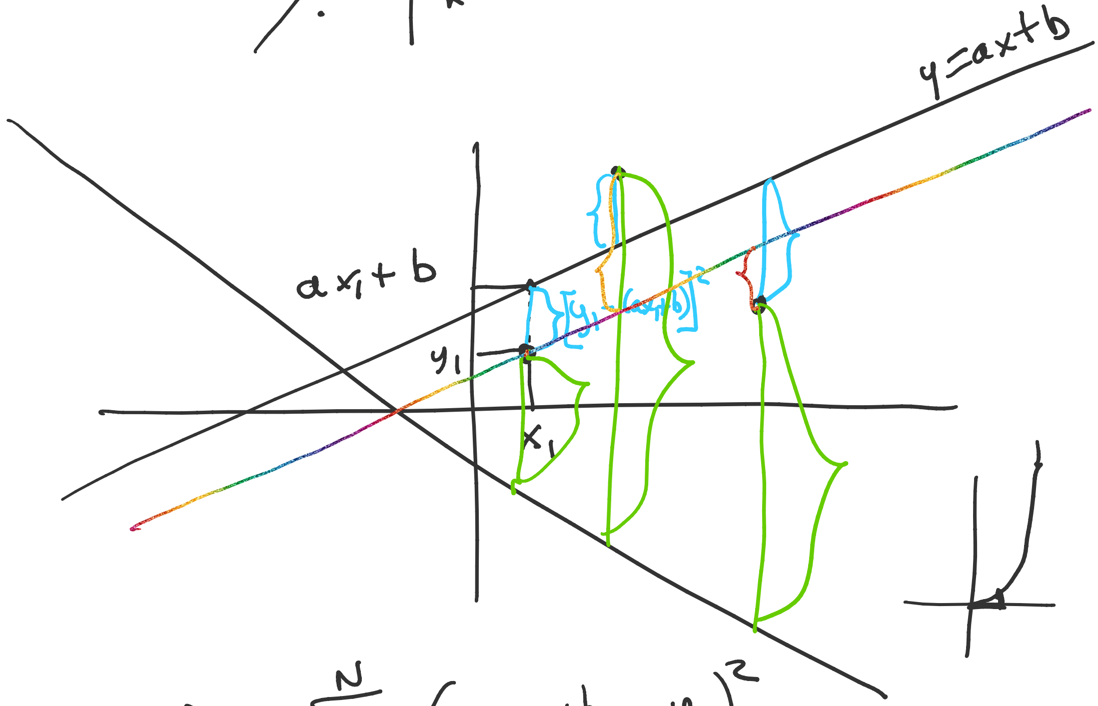
$$\boxed{y = \bar{a}x + \bar{b}}$$

retta di regressione

è alla base dell'Intelligenza Artificiale. ....





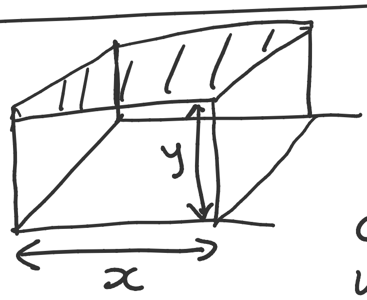


$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (a x_i + b - y_1)^2$$

Se troviamo il $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = f(\bar{a}, \bar{b})$

$(\bar{a}, \bar{b})$ mi dà il minimo.
sono due numeri reali

allora la retta regressione è $\boxed{y = \bar{a}x + \bar{b}}$



Legna a disposizione questa legna copre al massimo una superficie S.

Qual'è la misura massima del mio ripostiglio per massimizzare il volume.

Area da coprire $= \underbrace{4xy}_{\text{i 4 muri}} + \underbrace{x^2}_{\text{Tetto}} = S$

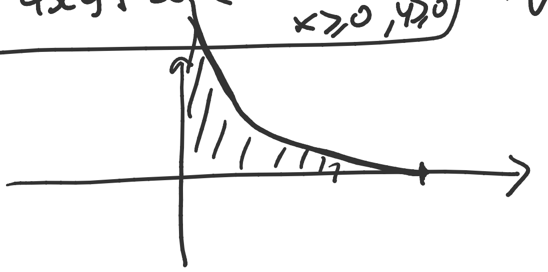
Volume $x^2 y = f(x,y)$

$\max\limits_{(x,y)\ \text{t.c.}} (x^2 y)$

Problema di massimo

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\,(x^2y) \\ (x,y) \text{ t.c.} \\ 4xy+x^2 \le S \qquad x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}}$$

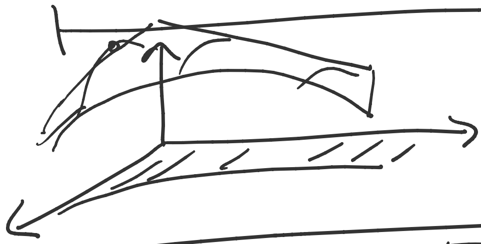
Problema di massimo vincolato.



$$4xy+x^2 \doteq S$$

$$y=\frac{S-x^2}{4x}$$

$$y=\frac{S}{4x}-x$$



1) max e min $\boxed{\text{non}}$ vincolati

$\Updownarrow$

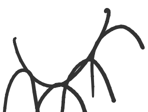
massimi o minimi <u>interno</u>

<u>Teo:</u> <u>Fermat</u> Se (x_0,y_0) è un punto di max o di min locale allora $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$

Per cercare <u>massimo</u> o <u>minimo</u> <u>locale</u> (massimi e minimi non vincolati) cercare i <u>punti critici</u> cioè

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \qquad \boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}}$$

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \nabla f=2(x,y)$$



$$g(x,y)=x^2-y^2 \qquad \nabla g=2(x,-y)$$

$$h(x,y)=-x^2-y^2 \qquad \nabla h=-2(x,y)$$

Nei tre casi l'unico punto critico è $\boxed{(0,0)}$ <u>ma</u> per f è un minimo per g non è né min né max per h è un massimo

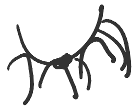
Teorema $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Sia (x_0, y_0) un punto critico per f.

Se $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ è un pto di minimo

Se $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ è un pto di massimo

Se $\det D^2 f(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un p.to di sella, in particolare non è né di massimo, né di minimo



OSS: Se $\det D^2 f(x_0, y_0) = 0$ allora potrebbe essere sia max che di minimo, come potrebbe non essere né l'uno, né l'altro.

$\det D^2 f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ NON HO INFORMAZIONI

$f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow \nabla f = (2x, 2y)$

$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det D^2 f = 4 > 0 \Rightarrow (0,0)$

$$\det D^2 f = 4 > 0 \qquad \Rightarrow (0,0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0 \qquad \text{è un minimo}$$

$$g(x,y) = x^2 - y^2 \longrightarrow \nabla g = (2x, -2y)$$

$$D^2 g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 g = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \longrightarrow (0,0) \text{ p.to di sella}$$

$$h(x,y) = -x^2 - y^2 \longrightarrow \nabla h = (-2x, -2y)$$

$$D^2 h = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 h = (-2)\cdot(-2) = 4 \,, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} < 0$$

$(0,0)$ è un p.to di <u>massimo</u>.

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\max (x^2 y)$$

(x,y) t.c. $\boxed{4xy + x^2 = 5}$

$x \geq 0 \quad y > 0$

$\max x^2 y \longrightarrow +\infty$

$\uparrow \uparrow$

$$\nabla f = (2xy, \; x^2)$$

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \qquad (0, y)$

Si potrebbe fare con il metodo visto oggi.

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (a x_i + b - y_i)^2$$

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{N} \left[2(a x_i + b - y_i) x_i \,,\, 2(a x_i + b - y_i) \right]$$

<u>Esercizio</u>

$P_1 = (1, 2) \qquad P_2 = (2, 3)$

Eserc.

$P_1 = (1, 2)$ $\qquad$ $P_2 = (2, 3)$

$P_3 = (3, 7)$

Trovare la retta di regressione