17/12/2021

CAMPI VETTORIALI NEL PIANO

I

$$F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$
$$(x,y) \in D \longrightarrow (F_1(x,y),\ F_2(x,y))$$

F_1 e F_2 sono due funzioni definite in D.

Definire il lavoro di F lungo una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ t.c.
$\varphi(t) \in D \quad \forall\, t \in [a,b]$, curva regolare.
$\varphi(t) = (x(t), y(t)) \longrightarrow \exists\ \varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$
$|\varphi'(t)| \neq 0$

$$L(F,\varphi) = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt =$$

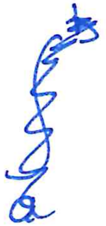
$$\boxed{L(F,\varphi) = \int_a^b \underbrace{F_1(x(t),y(t))\, x'(t) + F_2(x(t),y(t)) \cdot y'(t)}_{g(t)} \, dt}$$

Se $F \perp \varphi' \implies \langle F, \varphi' \rangle = 0 \implies$ Lavoro è nullo

Definizione: $F: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

F è un campo conservativo se esiste $f: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ detta potenziale tale che $\boxed{F(x,y)=\nabla f(x,y)}$ $\forall (x,y)\in D$.

Proprietà Se $F=\nabla f$ allora $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t)=(x(t),y(t))$



$$L(F,\varphi) = f(x(b),y(b)) - f(x(a),y(a)).$$

(f gioca il ruolo della "primitiva" di F, inoltre vale una specie teorema fondamentale del calcolo)

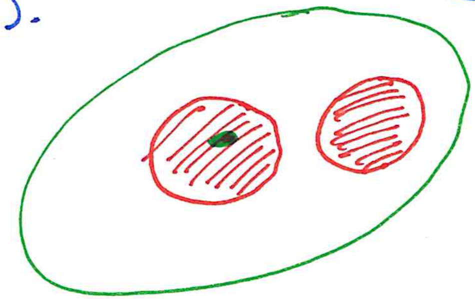
OSS 1: Se F è $\boxed{\text{conservativo}}$ il lavoro non dipende dalla curva ma solo dai punti estremali della curva cioè $(x(a),y(a))$ e $(x(b),y(b))$.

In particolare se la curva è chiusa

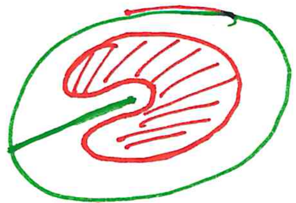
$$(x(a),y(a))=(x(b),y(b)) \Longrightarrow L(F,\varphi)=0$$

OSS 2: Se il campo è conservativo $F = (F_1, F_2)$.

allora $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}}$. (*)



Definizione Uno campo vettoriale è irrotazionale se verifica (*)



semplicemente connesso

Prop: Campo conservativo $\Longrightarrow$ è irrotazionale.

Teorema Se $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è irrotazionale e se D è semplicemente connesso allora F è conservativo.

Definizione D è semplicemente connesso quando non ha buchi

Cioè se φ è una curva chiusa e $\varphi \subset D$ allora la parte di dominio

Se F è irrotazionale e D **non** è semplicemente connesso IV

F potrebbe essere conservativo o no

↳ $L(F, \varphi) = \int_a^b F_1(x(t), y(t))\, x'(t) + F_2(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$

Se questo integrale risulta molto complesso posso provare a verificare se esiste un potenziale f t.c. $\nabla f = F$ **in D**

V

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ è irrotazionale $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

$\boxed{\varphi = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]}$ e $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\left(L(F, \varphi) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0 \, . \Longrightarrow F \text{ non è } \underline{\underline{\text{conservativo}}}. \right)$$

Se cerchiamo un potenziale : f t.c.

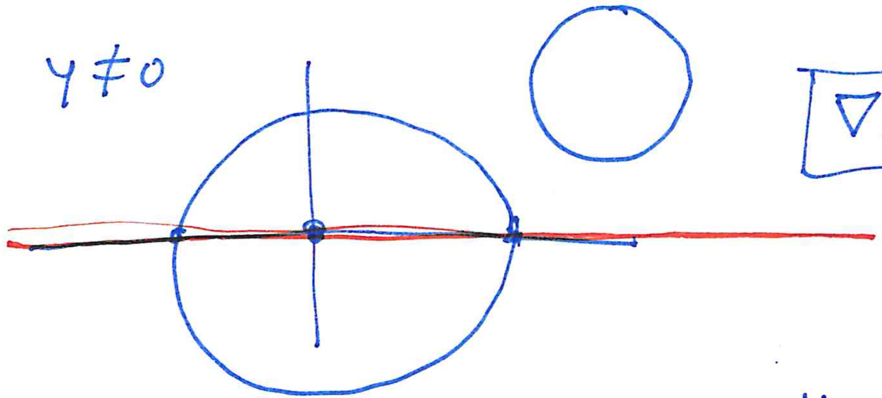
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \int \frac{-\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} \, dx = - \int \frac{1}{s^2+1} \, ds = - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

$s = \frac{x}{y} \qquad ds = \frac{1}{y} dx$

$$\boxed{f(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$y \neq 0$



$\boxed{\nabla f = F.}$ è vero in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$.

e non in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Effettivamente f non è un potenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$F(x,y) = (\underbrace{xy^2 + e^{2x}}_{F_1}, \underbrace{x^2y + \cos(\pi y)}_{F_2}).$$

a) Calcolare $F(0,0)$ e determinare l'insieme di definizione di F.

b) Det se F è irrotazionale e se è conservativo.

c) Calcolare il lavoro di F lungo la curva
$\varphi(t) = (2\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

d) Calcolare il lavoro di F lungo la curva
$\varphi(t) = (t, t^3)$ per $t \in [0,1]$.

a) $F(0,0) = (0 + e^{2\cdot 0}, 0 + \cos 0) = (1, 1).$

$\mathrm{Dom}\, F = \mathbb{R}^2.$

b). $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy$

$\qquad \qquad ||$

$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy$

$\Longrightarrow$ F è irrotazionale.
$D = \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso
$\Longrightarrow$ F è conservativo.

c) $\varphi(t) = (2\sin t, \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

Sapendo che F è $\boxed{\text{conservativo}}$ Verifichiamo se φ è chiusa.

$$\varphi(0) = (2 \cdot \sin 0, \cos 0) = (0, 1).$$
$$\varphi(2\pi) = (2\sin 2\pi, \cos 2\pi) = (0, 1).$$

φ è chiusa allora $\boxed{L(F, \varphi) = 0}$.

d). $\varphi(t) = (t, t^3)$ per $t \in [0, 1]$ $L(F, \varphi)$.

$\varphi(0) = (0, 0) \neq \varphi(1) = (1, 1)$.

φ non è chiuso

$F = \nabla f \Longrightarrow L(F, \varphi) = f(1,1) - f(0,0)$. Quando vale f?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + e^{2x} \longleftarrow F_1 \longrightarrow f(x,y) = \int xy^2 + e^{2x}\, dx = \dfrac{x^2}{2}y^2 + \dfrac{e^{2x}}{2} + g(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y + \cos(\pi y) \longleftarrow F_2. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + g(y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{x^2y} + g'(y) = \cancel{x^2y} + \cos(\pi y).$$

$$g'(y) = \cos(\pi y) \Longrightarrow g(y) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{\pi}\sin \pi y$$

IX

$$L(F,\varphi) = f(1,1) - f(0,0) = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + 0 - \left[\frac{0}{2} + \frac{1}{2} + 0\right] = \frac{e^2}{2}.$$

FINE

$$\varphi(t) = (\overset{x}{t}, \overset{y}{t^3})$$

$$\varphi'(t) = (\underset{x'}{1}, \underset{y'}{3t^2})$$

$$L(F,\varphi) = \int_0^1 \underbrace{(t \cdot t^6 + e^{2t})}_{F_1} 1 + \underbrace{(t^2 \cdot t^3 + \cos(\pi t^3))}_{F_2} \cdot 3t^2 \, dt.$$

In alternativa usare la definizione di lavoro.

$$= \int_0^1 t^7 + e^{2t} + 3t^7 + 3t^2 \cos(\pi t^3) \, dt$$

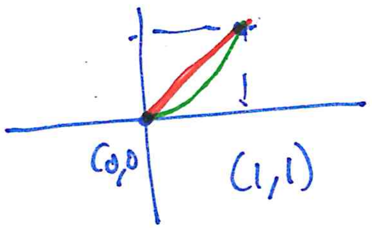
$$= \int_0^1 4t^7 + e^{2t} + 3t^2 \cos(\pi t^3) dt = \frac{1}{2} t^8 + \frac{e^{2t}}{2} + \int_0^1 3t^2 \cos(\pi t^3) dt$$

$$s = \pi t^3 \implies ds = 3\pi t^2 dt. \Rightarrow \frac{1}{\pi} ds = 3t^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} t^8 + \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{\pi} \int \cos s \, ds = \frac{1}{2} t^8 + \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \pi t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \pi - \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin 0\right)$$

$$= \frac{e^2}{}$$

X



F è conservativo, il lavoro dipende solo dagli estremi della curva $\rightarrow \varphi : (t, t) \rightarrow t \in [0,1]$

$\varphi' = (1,1)$

$$L(F, \varphi) = \int_0^1 t \cdot t^2 + e^{2t} + t \cdot t^2 + \cos \pi t \, dt$$

$$= \int_0^1 2t^3 + e^{2t} + \cos \pi t \, dt = \frac{2}{4} t^4 + \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{\sin \pi t}{\pi} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + \frac{\sin \pi}{\pi} - \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sin 0}{\pi}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2}.$$

$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y}\right) = (F_1, F_2)$

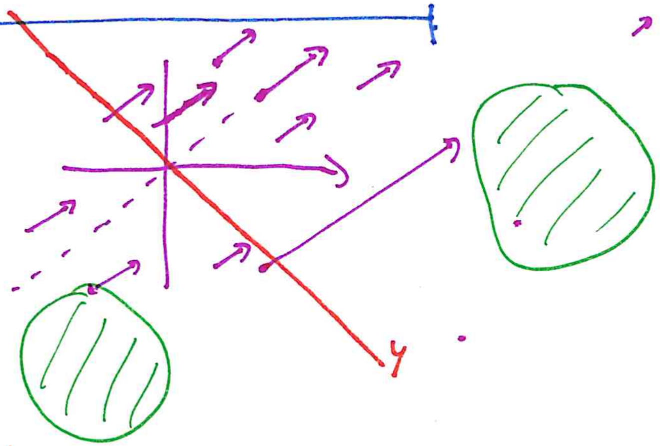
a). $F(1,1)$ e determinare l'insieme di definizione di F

b) Det se il campo è irrotazionale e se è conservativo

c) Calcolare il lavoro $\gamma(t) = (t, 3t)$, $t \in [2,4]$

d). Calcolare il lavoro di $G(x,y) = F(x,y) + (e^y, 0)$ in

$\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$



a) $F(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$D = \text{Def } F = \{x+y \neq 0,\ y \neq -x\}$

b). $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right) = \frac{-1}{(x+y)^2}$

$\parallel$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y}\right) = -\frac{1}{(x+y)^2}$

$\Longrightarrow$ F è irrotazionale in D.

D è semplicemente connesso

$\Longrightarrow$ F è conservativo

c) Calcolare il lavoro

$$\gamma(t)=(t,3t), \quad t\in[2,4]$$

$$\gamma(2)=(2,6)$$

$$\gamma(4)=(4,12) \qquad L(F,\gamma)=f(4,12)-f(2,6).$$

Trovare il potenziale f . t.c. $\nabla f = F$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y} \end{cases} \Longrightarrow f(x,y) = \int \frac{1}{x+y}\,dx = \log|x+y| + g(y)$$

costante

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\log|x+y| + g(y)\right) = \frac{1}{x+y} + g'(y) = \frac{1}{x+y} \Longrightarrow g'(y)=0$$

$$f(x,y)=\log|x+y|. \quad \longrightarrow D=\mathbb{R}^2\setminus\{x+y=0\}$$

$$L(F,\gamma)=\log|4+12|-\log|6+2|=\log 16-\log 8=\log\frac{16}{8}=\log 2.$$

IN ALTERNATIVO

$\gamma(t) = (t, 3t) \longrightarrow \gamma'(t) = (1, 3)$

$$L(F,\gamma) = \int_2^4 \frac{1}{t+3t}\cdot 1 + \frac{1}{t+3t}\cdot 3\, dt = \int_2^4 4\,\frac{1}{4t}\, dt = \int_2^4 \frac{1}{t}\, dt$$

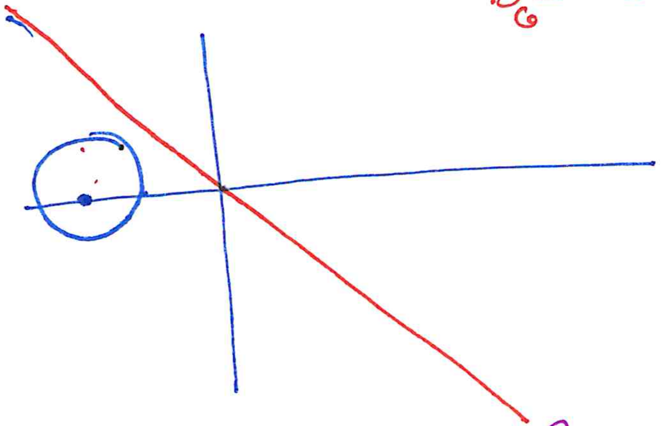
$$= \log|t|\Big|_2^4 = \log 4 - \log 2 = \log\frac{4}{2} = \log 2.$$

d) $G(x,y) = F(x,y) + (e^y, 0) \longrightarrow \gamma(t) = (\cos t - 2, \sin t)$ per $t \in (0, 2\pi]$

$D_G = \mathbb{R}^2 - \{y = -x\}$

$$\begin{cases} x = \cos t - 2 \\ y = \sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 1$$



$\gamma(2\pi) = (-1, 0)$ $\quad\gamma$ è chiusa.

$\gamma(0) = (-1, 0).$

G è irrotazionale? $\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(e^y) \overset{?}{\neq} \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$ $\qquad G$ non è irrotazionale

$\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y$

$\Downarrow$

G non è conservativa

XIV

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{\partial G_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial e^y}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + e^y = \frac{\partial F_2}{\partial x} + e^y$$

$$G_1 = F_1 + e^y \qquad \frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad ? \qquad \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

$$G_2 = F_2 + 0$$

$$G = \underbrace{F}_{\text{conservativo}} + \underbrace{(e^y, 0)}_{\text{NO}}$$

conservativo $\Leftrightarrow$ γ è chiusa

$$\boxed{\begin{aligned} &L(F + (e^y, 0), \gamma) \\ &= \underbrace{L(F, \gamma)}_{=0} + L((e^y, 0), \gamma). \end{aligned}}$$

$$\gamma(t) = (\cos t - 2, \sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$L(G, \gamma) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cdot \cancel{\cos t \, dt} (-\sin t)\, dt = -\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt.$$

$$= \ldots\ldots$$

$s = \sin t$

$ds = \cos t \, dt$

PROP.: Se $G(x,y) = F(x,y) + H(x,y)$

dove F e H sono due campi vettoriale

Se γ è una curva contenuta nel dominio di G

$$L(G,\gamma) = L(F,\gamma) + L(H,\gamma).$$

Esercizio $F(x,y)=\left(x+e^{2y},\ y^2+2xe^{2y}\right)$

a) Calcolare $F(1,0)$ e determinare l'ins. di definizione di F

b) Det. se F è irrotazionale e conservativo.

c) Calcolare $L(F,\gamma)$ det. da $\gamma(t)=(2\cos t, \sin t)$ con $t\in[-\pi,\pi]$

d) Calcolare $L(F,\gamma_1)$.

dove $\gamma_1(t)=(t^3,t)$ per $t\in[0,1]$

Esercizio $F(x,y)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

a) Det. il dominio di F

b) Det. se F è irrotazionale

c) Calcolare il lavoro di F lungo la curva $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ per $t\in[0,2\pi]$

d) Det. se F è conservativo, eventualmente trovarne il potenziale