Analisi Matematica II

Corso Birindelli, Falcone A.A. 1994/95

Foglio di Esercizi n.2: Massimi e minimi, convessità.

1. Sia T_σ, $\sigma > 0$, il dominio di $\mathbb{R}^2$ definito dalle limitazioni $-1 \leq y \leq 1$, $-\sigma(y^2+1) \leq x \leq \sigma(y^2+1)$ e sia f_α la funzione reale definita in $\mathbb{R}^2$ da:

$$f_\alpha(x,y) = \left[\left(\frac{x}{y^2+1}\right)^2 - \frac{|x|}{y^2+1} + 1\right]^\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f_α in T_σ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $\sigma \in (0, +\infty)$.

2. Sia $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ e sia $u : B_r(0) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che:

$$u_{xx} + u_{yy} > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che:

$$\max\{u(x,y) : (x,y) \in B_r(0)\} = \max\{u(x,y) : (x,y) \in \partial B_r(0)\}.$$

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione:

$$f(x,y) = xye^{(x+1)^2 + k(y-1)^2},$$

nel quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

4. Sia $f = f(x,y,z)$ una funzione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(x,y,z) \geq 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $f(0,0,z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la matrice hessiana di f in ogni punto del tipo $(0,0,z_0)$ ha 0 come autovalore.

5. Studiare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto della funzione:

$$f(x,y,z) = z(x^2+y^2) + 2xy$$

nel cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

6. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione:

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)(1-z^2)+z^2.$$

Successivamente calcolare i punti e i valori di massimo e minimo assoluto della funzione f nella sfera di centro l'origine e raggio r, al variare di r in $(0,+\infty)$.

7. Fra tutti i triangoli di perimetro $2p$, qual'e' quello di area massima?

8. Determinare λ e μ affinchè

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 + \lambda x + \mu y$$

abbia un estremo relativo in $(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$.

9. Sia $x_o \in \mathbb{R}^n$ un punto critico di $f \in C^2$ non degenere (i.e. determinante dell'hessiano è diverso da 0).

1. si supponga che x sia un altro punto critico di f in un intorno U di x_o, se ne deduca che esiste $y = (y_1,..,y_n) \in U$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_i)(x_j - x_{o_j}) = 0$$

2. Utilizzando 1., si dimostri che esiste un intorno U' di x_o tale che f non ha punti critici in U'

3. che cosa succede se si toglie l'ipotesi che x_o non è degenere?

10. Decomporre $a > 0$ in tre parti in modo tale che ls somma dei cubi delle tre parti risulti massima.

11. Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 e sia $f(x) = \psi(a.x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e a un fissato elemento di R^n dimostrare che f non ha punti critici non degeneri (vedi esercizio 9).

12. Determinare i punti di massimo e di minimo per la funzione $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ in a) $\mathbb{R}^2$, b) $Q = \{(x,y) : x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

13. Individuare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$.

14. Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo da rendere minimo il valore dell'integrale

$$\int_0^1 [ax + b - x^2]^2 \mathrm{d}x.$$

15. Determinare i punti di massimo e di minimo per la funzione $f(x,y) = xy^2e^{x-y}$ in a) $\mathbb{R}^2$, b) $R = [-2,0] \times [0,3]$.

16. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ nella regione delimitata dall'asse delle x e dal primo arco della cicloide.

17. Trovare i punti di massimo e di minimo di $f(x,y) = 3x - 2y$ nella regione $R = \{(x,y) : y \geq \mathrm{abs}(\sin(x)), x^2 + y^2 \leq 25, -\pi \leq x \leq \pi\}$.

18. Studiare la convessità della funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$. In quale insieme f è differenziabile? Calcolare ∇f e la matrice hessiana di f.

19. In quale dominio è convessa la funzione $\sin(x^2 + y^2)$?

20. In quale dominio è convessa la funzione $xy^2 + 3x^2$?

21. Sia A un insieme convesso. La funzione "distanza da A" $d(x,A)$ è convessa?

22. Definiamo in $\mathbb{R}^2$ gli insiemi $B_0 = B(0,1), B_1 = B((3,3),1), C = B_0 \cup B_1$. La funzione "distanza da C" $d(x,C)$ è convessa?