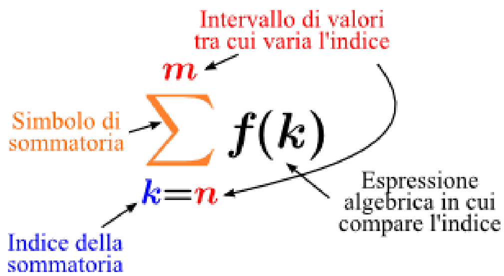
Legenda: $\aleph$ va letto $\mathbb{N}$={numeri naturali}
$\Re$ va letto $\mathbb{R}$={numeri reali}
:= va letto =

Indice

Sommatorie

La sommatoria è un modo compatto di scrivere la somma di un numero finito o infinito di termini. Il simbolo di sommatoria è la lettera greca maiuscola Σ , che però scritta da sola non ha alcun significato. Infatti, la sommatoria si compone di più parti:



Un'espressione come quella nell'immagine si legge: "somma per *k* che va da *n* ad *m* di $f(k)$". Essa equivale alla somma di $m-n+1$ termini dipendenti dall'indice *k*, il quale varia nell'intervallo $[n;m]$.

Quindi $\sum_{k=n}^{m} f(k)$ sarà uguale a $f(n)+f(n+1)+f(n+2).........+f(m-2)+f(m-1)+f(m)$

Esempio: $\sum_{k=1}^{4} 3k^2 = 3(1)^2 + 3(2)^2 + 3(3)^2 + 3(4)^2 = 90$

In generale $\sum_{k=n}^{m} f(k)$ è uguale a $\begin{cases} f(n)+f(n+1).....+f(m) & , \ se \ n \le m \\ 0 & , \ se \ n > m \end{cases}$

L'indice di sommatoria *k* si dice "indice muto", perché può essere sostituito con qualsiasi lettera dell'alfabeto e preservare lo stesso significato.

Proprietà della sommatoria

1. $\sum_{k=n}^{m}(a_k + b_k) = \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} b_k$ la sommatoria di una somma è uguale alla somma delle sommatorie

2. $\forall c \in \Re \ \sum_{k=n}^{m} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=n}^{m} a_k$ la sommatoria di un multiplo di un'espressione è uguale alla sommatoria dell'espressione moltiplicata per il fattore comune a tutti gli elementi dell'espressione. $\sum_{k=n}^{m} c = c \cdot (m-n+1)$ ossia è uguale al numero sommato a se stesso tante volte quanto è lungo l'intervallo $[m;n]$.

$\boxed{\sum_{k=0}^{m} c = c \cdot (m+1) \quad \text{caso particolare}}$

3. $\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{p} a_k$ se $n \le m < p$

casi particolari: se $n = m$. $\sum_{k=n}^{p} a_k = a_n + \sum_{k=n+1}^{p} a_k$ se $n = p-1$ $\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{k=n}^{p-1}(a_k) + a_p$

Slittamento di indice

Una stessa sommatoria può essere scritta in modi diversi, modificando l'indice. Ad esempio, se in una sommatoria compare $k+1$, spesso risulta più facile risolvere l'applicazione rispetto a *k*.
Per fare ciò, si impone $k+1=j$, con *j* un altro indice utile solo a non confondere le idee (imporre $k+1=k$ non ha senso in matematica, ma è in effetti ciò che viene fatto).

Prendiamo ad esempio la sommatoria $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)$ e riscriviamola in modo che a denominatore compaia solo l'indice di sommatoria.

Imponiamo $k+1=j$, da cui ricaviamo $k=j-1$ e sostituiamo quest'ultima nell'espressione:

$\sum_{j-1=0}^{3}\left(\frac{\sqrt{j-1}}{j}\right)$; $j-1=0$ lo scriviamo come $j=1$ e l'altro estremo j–1=3 come j=4

La sommatoria diventa quindi $\sum_{j=1}^{\overset{4}{\cancel{3}}}\left(\frac{\sqrt{j-1}}{j}\right)$; dal momento che *j* è un indice muto, nessuno vieta di sostituirlo con qualsiasi lettera : quindi è lecito porre $j=k$.

Abbiamo trovato che $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\overset{4}{\cancel{3}}}\left(\frac{\sqrt{k-1}}{k}\right)$

Inversione di indice

Come lo slittamento di indice, l'inversione di indice è un altro modo per scrivere una stessa sommatoria in modo diverso.
è possibile riscrivere una sommatoria definita in senso crescente, come un'altra sommatoria che però viene risolta in senso decrescente. Ovviamente, il risultato non cambia per la commutatività della somma.

Riprendiamo l'esempio di prima: $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)$ con *k* che assume i valori $k=0,\ k=1,\ k=2,\ k=3$

Troviamo un modo che consenta di rendere la sequenza di addendi decrescente. Utilizzando un indice *j*, imponiamo che quando $k=0$ j dovrà assumere il valore della quantità di addendi della sommatoria e, man mano che *k* cresce, *j* decrescerà di pari passo.
Quindi quando $k=0$, $j=4$; $k=1,\ j=3$; $k=2,\ j=2$; $k=3,\ j=1$
è evidente che $j=4-k$ e dunque $k=4-j$

Facendo slittare l'indice come visto prima, la sommatoria diventa $\sum_{j=4}^{1}\left(\frac{\sqrt{4-j}}{5-j}\right)$

Siccome per $n>m$ la sommatoria è nulla, scambiamo gli estremi e poniamo anche $j=k$

Abbiamo trovato che $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{\sqrt{4-k}}{5-k}\right)$

Vediamo ora tre esempi notevoli di sommatoria:

- $\sum_{k=0}^{n} k$, ossia la somma di una sequenza dei primi *n* numeri.

Per risolvere la sommatoria, chiediamoci quanto vale il suo doppio: $2\cdot\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k$

Dei due addendi, scriviamone uno invertendo l'indice : $2\cdot\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k)$

Per la prima proprietà, possiamo unire le due sommatorie: $2\cdot\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k)$

ossia $2\cdot\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} n$ che equivale a $2\cdot\sum_{k=0}^{n} k = n\cdot(n+1)$

dall'ultima uguaglianza si ricava che $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

- $\sum_{k=0}^{n/2} 2k$, ossia la somma di una sequenza dei primi *n* numeri pari.

Applichiamo il metodo visto per il primo esempio e facciamo in modo da avere il doppio della sommatoria: in questo caso è sufficiente portare il 2 fuori dalla sommatoria, ottenere

$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} k$ e procedere come prima $\longrightarrow$ $2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} k = \sum_{k=0}^{n/2} k + \sum_{k=0}^{n/2}\left(\frac{n}{2}-k\right) = \sum_{k=0}^{n/2}\frac{n}{2}$

Dall'ultima uguaglianza ricaviamo $\boxed{\sum_{k=0}^{n/2} 2k = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$, ossia la somma di una sequenza dei primi *n* numeri dispari.

Applichiamo la proprietà distributiva: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$

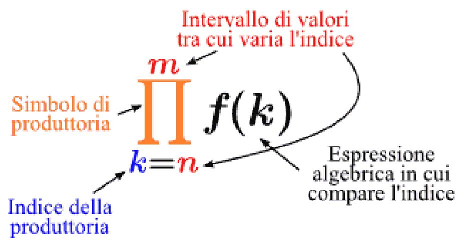
Il primo addendo è uguale a $n\cdot(n+1)$, il secondo vale *n*.

Quindi scriviamo $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n\cdot(n+1) - n \quad = \quad n^2 + n - n$

Ricaviamo dunque che: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2}$

Produttorie

La produttoria è, similmente alla sommatoria, un modo compatto di scrivere il prodotto di un numero finito o infinito di termini. Il simbolo di produttoria è la lettera greca maiuscola $\prod$, che però scritta da sola non ha alcun significato. Infatti, la produttoria si compone di più parti:



Un'espressione come quella nell'immagine si legge: "prodotto per *k* che va da *n* ad *m* di $f(k)$". Essa equivale al prodotto di $m-n+1$ termini dipendenti dall'indice *k*, il quale varia nell'intervallo $[n;m]$.

Quindi $\prod_{k=n}^{m} f(k)$ sarà uguale a $f(n)\cdot f(n+1)\cdot f(n+2)\ldots\ldots\cdot f(m-2)\cdot f(m-1)\cdot f(m)$

Esempio: $\prod_{k=2}^{4}(5+k^3)=(5+2^3)\cdot(5+3^3)\cdot(5+4^3)=28.704$

In generale $\prod_{k=n}^{m} f(k)$ è uguale a $\begin{cases} f(n)\cdot f(n+1)\ldots\cdot f(m) & ,\ se\ n\le m \\ 1 & ,\ se\ \ n>m \end{cases}$

Proprietà della produttoria

1. $\prod_{k=n}^{m}(a_k\cdot b_k)=\prod_{k=n}^{m}(a_k)\cdot\prod_{k=n}^{m}(b_k)$ la produttoria di un prodotto è uguale al prodotto delle produttorie

2. $\forall c\in\Re \quad \prod_{k=n}^{m}(a_k)^c=\left(\prod_{k=n}^{m}a_k\right)^c$ la produttoria di una potenza è uguale alla potenza della produttoria

3. $\prod_{k=n}^{m}c\cdot a_k=\prod_{k=n}^{m}c\cdot\prod_{k=n}^{m}a_k$, ma $\boxed{\prod_{k=n}^{m}c=c^{m-n+1}}$ dunque $\prod_{k=n}^{m}c\cdot a_k = c^{m-n+1}\cdot\prod_{k=n}^{m}a_k$

Un esempio notevole della proprietà nel riquadro è $\boxed{\prod_{k=1}^{n}k=n!}$, dove n ! è detto <u>fattoriale</u>, ed è definito come $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots\cdot 2\cdot 1$ (se $n\ge 1$) [0! è per convenzione uguale a 1]

La proprietà fondamentale del fattoriale: $n!=\prod_{k=1}^{n-1}(k)\cdot n$ ossia $n!=n\cdot(n-1)!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!\ldots\ldots$

4. $\prod_{k=n}^{p}a_k=\left(\prod_{k=n}^{m}a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=m+1}^{p}a_k\right)$, con $n\le m<p$

casi particolari: se $n=m$. $\prod_{k=n}^{p}a_k=a_n\cdot\left(\prod_{k=n+1}^{p}a_k\right)$ se $n=p-1$ $\prod_{k=n}^{p}a_k=\prod_{k=n}^{p-1}a_k\cdot(a_p)$

Principio di induzione

Il principio di induzione è una tecnica particolare di dimostrazione diretta di proposizioni algebriche. L'idea alla base è che per dimostrare che una qualche affermazione $"P_n"$ dipendente da un numero naturale *n* è vera per tutti gli $n \in \aleph$, basta dimostrare che è vera per $n = 1$ (oppure $n = 0$, a seconda dei casi) e poi dimostrare che se è vera per un qualunque $n \in \aleph$ (questa si chiama *ipotesi induttiva*), allora è vera anche per $n + 1$. Infatti, in questo modo, sapendo che è vera per 1 dimostriamo che è vera per 2, poi per 3, per 4 e così via.

Il principio di induzione può essere espresso nel modo seguente:

Principio d'induzione 1

Sia P_n un'affermazione dipendente da un numero naturale *n*. Supponiamo che:

a) P_0 sia vera

b) Se P_n è vera, anche P_{n+1} lo è.

~~c)~~ Allora P_n è vera per ogni numero naturale *n*.

Un'altra forma di cui non è difficile dimostrare l'equivalenza con la precedente è la seguente:

Principio d'induzione 2

Sia P_n un'affermazione dipendente da un numero naturale *n*. Supponiamo che:

a) P_0 sia vera

b) Se P_k è vera per ogni $0 \le k \le n$, allora anche P_{n+1} è vera.

Allora P_n è vera per ogni numero naturale *n*.

Si può esprimere anche in termini logici:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \aleph = \{0, 1, 2, 3, ...\} \\ 0 \in A \\ \forall n \in \aleph \;\; n \in A \;\Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \aleph$$

Vediamo subito alcuni esempi di proposizioni dimostrabili per induzione

Esempio 1.

$\forall\ n \geq 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k \ = \ \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ questa è la nostra P_n

Verifichiamo se P_1 è vera (non P_0, perché P_n è definita $\forall\ n \geq 1$) $\sum_{k=1}^{1} k \ = \ \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \longrightarrow 1 = 1$

Scriviamo P_{n+1} : $\sum_{k=1}^{n+1} k \ = \ \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ e verifichiamola.

Lavoriamo sul membro di sinistra. Scorporiamo l'ultimo termine (quello per $k = n+1$) in modo da ottenere P_n. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$

Sostituiamo a questo punto la $\mathrm{P}_n \longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2}$

In effetti $\frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$, che è proprio l'espressione P_{n+1}.

Esempio 2.

$\forall\ n \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \ = \ n^2$ questa è la P_n

Verificchiamo se P_0 è vera $\qquad \sum_{k=1}^{0} (2k-1) \ = 0^2 \qquad 0 = 0$ (infatti la sommatoria ha $n > m$).

Scriviamo e verifichiamo $\mathrm{P}_{n+1} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

Scorporiamo dalla sommatoria l'ultimo termine (quello per $k = n+1$) :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2n + 1$$

La sommatoria è la P_n, quindi riscriviamo $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \ = \ (n+1)^2$ c.v.d.

Esempio 3. Dimostriamo per induzione la disuguaglianza di Bernouilli.

$\forall\ h \in \Re,\ h \geq -1 \quad (1+h)^n \geq 1+nh$ questa è P_n

Verifichiamo P_0 : $(1+h)^0 \geq 1+0\cdot h \quad 1=1$

Scriviamo e verifichiamo P_{n+1} : $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot h$

$(1+h)^{n+1}$ è esprimibile come $(1+h)^n \cdot (1+h)$ per le proprietà delle potenze.

Abbiamo così il primo membro di P_n e possiamo riscrivere la disuguaglianza in questo modo:

$(1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)\cdot(1+h)$

Svolgiamo le parentesi al secondo membro $1+h+nh+nh^2$ esprimibile a sua volta come: $1+h(n+1)+nh^2$

Essendo nh^2 un numero sempre positivo, è lecito porre $1+h(n+1)+nh^2 \geq 1+h(n+1)$

dove $1+h(n+1)$ è il secondo membro di P_{n+1}

Se dunque $1+h(n+1)$ è minore o uguale di $1+h(n+1)+nh^2 = (1+nh)\cdot(1+h)$ che, a sua volta, è minore o uguale di $(1+h)^{n+1}$, è giusto scrivere $1+h(n+1) \leq (1+h)^{n+1}$ che è la nostra P_{n+1}

Esempio 4.

$\forall\ n \in \aleph \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ questa è la P_n

Verifichiamo P_0 : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \dfrac{0\cdot(0+1)\cdot(2\cdot 0+1)}{6} \qquad 0 = 0$

Scriviamo e verifichiamo P_{n+1}: $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$

Scorporiamo il termine $k = n+1$ e otteniamo $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

Eseguiamo i calcoli : $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$

$$= (n+1)\cdot\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) = (n+1)\cdot\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = (n+1)\cdot\left(\frac{(n+2)\cdot(2n+3)}{6}\right)$$ che è P_{n+1}

CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio studia i raggruppamenti che si possono ottenere con un dato numero *n* di oggetti disposti su un dato numero *k* di posti.
Esistono tre raggruppamenti possibili ma, prima di parlarne, definiamo il coefficiente binomiale.
Siano *n* e *k* due numeri naturali. Si definisce coefficiente binomiale e si indica con $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n\,!}{k\,!\cdot(n-k)\,!} & se \quad 0 \le k \le n \\ 0 & se \quad 0 \le n < k \end{cases}$$

Esso fornisce il numero di sottoinsiemi di *k* che si possono formare a partire da un insieme che contiene *n* elementi. Il coefficiente binomiale gode delle seguenti proprietà:

- $\forall n \in \aleph \quad \binom{n}{0} = 1$ infatti $\dfrac{n\,!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n\,!}{1 \cdot n!} = 1$
- $\forall n,k \in \aleph \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ infatti $\dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)!} = \dfrac{n\,!}{(n-k)!(n-n+k)!}$
- $\forall n,k \in \aleph \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ infatti, se sviluppiamo il secondo membro:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = n!\cdot\frac{k+1+n-k}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

1. Permutazioni: sono le applicazioni biunivoche dell'insieme $\{1,2,3,.....n\}$ in sé. Ossia sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è uguale al numero di posti e conta l'ordine con cui si dispongono. Le permutazioni possono essere senza ripetizioni o con ripetizione di oggetti.
Le permutazioni di *n* elementi senza ripetizione di oggetti sono date da $\boxed{P_n = n\,!}$

Le permutazioni di *n* elementi con ripetizione di oggetti sono date da $P_n^r = \dfrac{n\,!}{r_1\,!r_2\,!....r_k\,!}$

2.Combinazioni di *k* elementi presi da *n* elementi: sono i sottoinsiemi dell'insieme $\{1,2,3,.....n\}$ costituiti da *k* elementi. Ossia sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e non conta l'ordine con cui si dispongono.

Le combinazioni di *n* elementi senza ripetizione di oggetti sono date da $\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k}}$

Le permutazioni di *n* elementi con ripetizione di oggetti sono date da $C_{n,k}^r = \dfrac{(n+k-1)\,!}{k\,!\cdot(n-1)!}$

3.Disposizioni: i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e conta l'ordine con cui si dispongono. Senza ripetizioni sono date da $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ Con ripetizione di oggetti sono date da $\boxed{D_{n,k}^r = n^k}$

IL BINOMIO DI NEWTON

Il binomio di Newton è una formula che permette di sviluppare le potenze con esponente intero positivo di un qualsiasi binomio, senza bisogno di effettuare alcun calcolo. Da questo procedimento prende il nome il "coefficiente binomiale". Esiste anche una tabella, nota come triangolo di Tartaglia, composta da numeri naturali, che sono ognuno un particolare coefficiente binomiale, grazie alla quale è possibile sviluppare le potenze di binomi.

Vediamo la formula generale del binomio di Newton:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(a^{n-k} \cdot b^k\right)}$$

Proponiamo due dimostrazioni della formula, tenendo conto che $\forall c \in \Re$ si pone $c^0 = 1$.

<u>Dimostrazione I</u> (intuitiva) : sviluppiamo in modo generico la potenza di binomio:

$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot ...... \cdot (a+b)$ n volte; mettendo in evidenza tutte le *a* e le *b*:

$(a+b)^n = a(....) \cdot (.....) + b(....) \cdot (.....)$ dove le parentesi stavolta si ripetono $n-1$ volte.

Le *a* e le *b* si presentano in tutte le possibile combinazioni e, alla fine, senza semplificare nulla, si avranno 2^n addendi. (i modi di sistemare 2 numeri in disposizioni di *n* posti).

Quanti sono gli addendi di tale sviluppo con esattamente *k* fattori uguali a *b* e i restanti $n-k$ fattori uguali ad *a*? Sono tutti i modi possibili con cui ordinare tali addendi: infatti ogni addendo corrisponde alla scelta di *k* tra le posizioni che vanno da 1 a *n*.

Ad esempio, se prendo $n = 5$ e $k = 2$, potrò combinare 2 "*b*" e $5-2$ "*a*" in vari modi (come *babaa*, *aabba*, *abbaa* e così via). In altri termini, posso scrivere *a* e *b* in tutti i modi che ho di scegliere due elementi presi da un insieme di 5. Queste sono le combinazioni $\binom{n}{k}$.

Quindi tutti gli addendi dello sviluppo, con *k* "*b*" e $n-k$ "*a*" sono tanti quante le combinazioni che, però, considerando la proprietà commutativa del prodotto, hanno tutti lo stesso valore (ad esempio $babaa = aabba$). Quindi alla fine si avrà esattamente il prodotto tra $n-k$ "*a*" moltiplicate per se stesse e *k* "*b*" moltiplicate per se stesse. In termini matematici, $a^{n-k} \cdot b^k$.

E se tale prodotto deve ripetersi tante quante sono le combinazioni di *k* elementi su *n*, è giusto scrivere $\binom{n}{k} \cdot \left(a^{n-k} \cdot b^k\right)$.

Infine, dovendo sommare il binomio a se stesso tante volte quanto vale l'esponente del binomio, inseriremo il tutto in una sommatoria da 0 ad *n*.

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(a^{n-k} \cdot b^k\right)$ che è la formula iniziale.

<u>Dimostrazione II</u> (per induzione)

Scriviamo la P_n : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^k\right)$

Verifichiamo P_0 : $(a+b)^0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}\cdot\left(a^{-k}\cdot b^k\right)$ 1 = 1

Scriviamo e verifichiamo P_{n+1} $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$

Scriviamo il primo membro di P_{n+1} come $(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\cdot(a+b)$ e sostituiamo al primo fattore il valore di P_n : $(a+b)^n\cdot(a+b)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^k\right)\right)\cdot(a+b)$

Concentriamoci ora solo sul secondo membro e applichiamo la proprietà distributiva:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^k\right)\right)\cdot(a+b)=a\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^k\right)+b\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^k\right)$$

I termini *a* e *b* possono entrare nella sommatoria : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k}\cdot b^{k+1}\right)$ $(*)$

Applichiamo al secondo addendo lo slittamento di indice per far corrispondere le espressioni delle due sommatorie (poniamo $j=k+1$) : $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\cdot\left(a^{n-j+1}\cdot b^j\right)\xrightarrow{j\ torna\ k}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$

A questo punto riscriviamo la somma $(*)$ come : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$

Ora facciamo in modo che primo e secondo addendo abbiano stessi estremi di sommatoria:
ossia scorporiamo al primo membro l'espressione per $k=0$ e al secondo quella per $k=n+1$:

$$\binom{n}{0}\cdot\left(a^{n+1}\cdot b^0\right)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)+\binom{n}{n+1-1}\cdot\left(a^{n-(n+1)+1}\cdot b^{n+1}\right)$$

dei due elementi scorporati rimane per il primo addendo a^{n+1} e per il secondo b^{n+1}
Ora che le due sommatorie hanno stessi estremi, è possibile sommare i loro argomenti: $a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$ chiamiamo questa somma $\mathbf{S}_1$

Consideriamo ora il secondo membro di P_{n+1} e verifichiamo che sia uguale a S_1

Da $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$ scorporiamo primo e ultimo addendo: $a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot\left(a^{n-k+1}\cdot b^k\right)$

chiamiamo questa somma $\mathbf{S}_2$

$S_1 = S_2$ sembra vero in tutto tranne che per $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$

Ma considerando le proprietà del coefficiente binomiale, e in particolare $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$, si noterà che i due membri sono uguali c.v.d.

NUMERI COMPLESSI

I numeri reali non sono sufficienti a risolvere tutte le equazioni di grado superiore al primo. Esistono infatti delle restrizioni. La più grande tra queste è che nell'insieme $\Re$ non esistono le radici dei numeri negativi. Per questo, ad esempio, equazioni come $x^2 + 1 = 0$ non hanno alcuna soluzione.

Per ampliare il campo dei numeri esistenti, è stato aggiunto l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ che comprende, oltre a tutti gli insiemi già conosciuti ($\aleph, Z, Q, \Re$), anche altri in grado di garantire soluzioni a tutti i polinomi. In effetti, è stato introdotto un unico numero nuovo dal quale, grazie alle operazioni di somma e prodotto, sono stati generati tutti gli altri.

Tale numero è i, detto <u>unità immaginaria</u> e definito mediante la relazione $\boxed{i^2 = -1}$

Un generico numero complesso si indica con la lettera *z*.

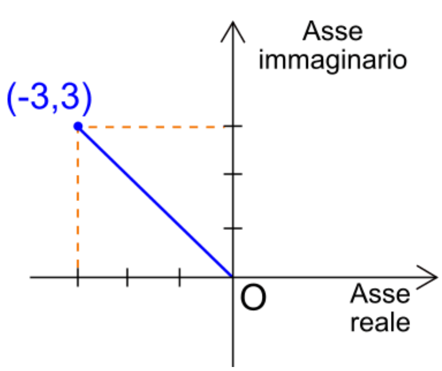
Che significato geometrico hanno i numeri complessi? Prima di rispondere, dobbiamo precisare che, dal momento che consideriamo l'operazione prodotto interna al campo dei numeri complessi, esistono anche i multipli di *i* (2*i*, 16*i*...). Tutti questi numeri vengono rappresentati graficamente nell'asse delle ordinate del cosiddetto <u>piano di Gauss</u>. Tale asse è definito <u>asse immaginario</u> e contiene i numeri definiti immaginari puri.

L'asse delle ascisse, invece, corrisponde all'asse dei numeri reali. La relazione più semplice che esiste tra un numero reale e un numero complesso è la loro somma:

$$\forall a \in \Re \quad \forall bi \in \mathbb{C} \quad \exists \ a + bi \in \mathbb{C}$$

Tale numero viene rappresentato nel piano di Gauss con ascissa uguale ad *a* e ordinate uguale a *b*.

Ad esempio, il numero $-3 + 3i$ è così raffigurato:

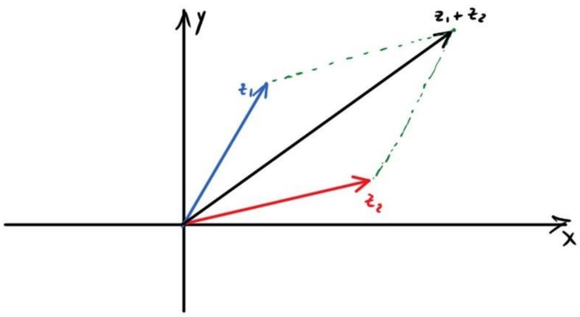


Quindi, l'insieme dei numeri complessi è dato da $\mathbb{C} := \{a + bi \ / \ a, b \in \Re\}$ ed è rappresentato graficamente come un piano cartesiano il cui asse delle ascisse è la retta reale $\Re$, e il cui asse delle ordinate è la retta immaginaria $i\Re$, e si identifica $a + bi$ come il punto di coordinate $(a; b)$

Operazioni in C

Le operazioni tra numeri complessi si definiscono a partire dalle operazioni tra numeri reali. Alle operazioni canoniche, però, se ne aggiungono anche delle altre.

1. L'operazione somma tra numeri complessi si definisce in modo tale che restino valide le sue proprietà in $\Re$ (commutativa, associativa ecc..).
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$; graficamente si rappresenta mediante la regola del parallelogramma



Se chiamiamo $a+bi=z$ e $c+di=w$, $z+w$, come già accennato, gode delle stesse proprietà della somma fra numeri reali: proprietà commutativa ($z+w=w+z$), proprietà associativa ($(z+w)+v=z+(w+v)$), elemento neutro ($0=0+\overset{z}{\cancel{0i}}$), elemento opposto ($z+(-z)=0$).

Un'operazione che si perde nel passaggio da $\Re$ a $\mathbb{C}$ è l'ordinamento: non esiste un criterio soddisfacente per cui poter dire $z \geq w$ o $z \leq w$. $\forall z, w \in \mathbb{C}$

2. L'operazione prodotto tra numeri complessi è definita come
$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+a\cdot di+c\cdot bi+bi\cdot di=ac+(ad+bc)i+(bd)\cdot i^2=ac-bd+(ad+bc)i$
Le proprietà del prodotto sono le stesse dei numeri reali: proprietà commutativa ($z\cdot w=w\cdot z$), proprietà associativa ($z(w\cdot v)=(z\cdot w)v$), proprietà distributiva ($z(w+v)=zw+zv$), elemento neutro ($1\overset{\cdot z=z}{\cancel{+0i}}$), elemento opposto ($1/z$).
Ovviamente $\forall z \in \mathbb{C} \quad z\cdot 0=0$ e $\forall z \in \mathbb{C} \quad z\cdot w=0$ se $z=0 \vee w=0$

3. L'operazione differenza tra numeri complessi si definisce in modo analogo alla somma:

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

Prima di definire la divisione tra numeri complessi, vediamo altri tipi di funzioni in $\mathbb{C}$.

$\forall z=a+bi \in \mathbb{C}$	la funzione	$\mathrm{Re}(z)=a$	è la <u>parte reale</u> di *z*.
	la funzione	$\mathrm{Im}(z)=b$	è la <u>parte immaginaria</u> di *z*.
con $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \Re$			

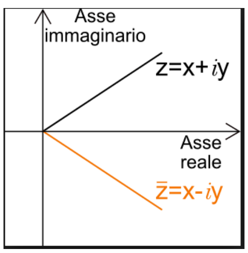
4. Coniugazione : è un'applicazione associata ai numeri complessi. Si dice <u>coniugato</u> di un numero complesso $z = a + bi$, e si indica con $\bar{z}$, il numero $\underline{\bar{z} = a - bi}$; ossia il numero tale che $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$ *e* $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$. I numeri per cui vale $z = \bar{z}$ sono i numeri reali.

La coniugazione di una somma fra numeri complessi è uguale alla somma dei complessi coniugati:

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$

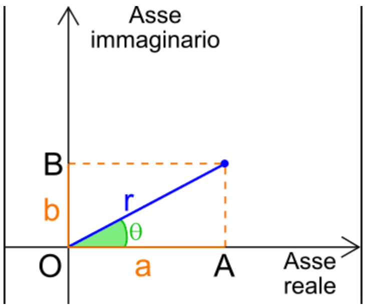
La coniugazione di un prodotto fra numeri complessi è uguale al prodotto dei complessi coniugati:

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$



5. Modulo di un numero complesso : è il corrispettivo complesso del valore assoluto in $\Re$

Si indica con $|z|$ o con ρ e corrisponde graficamente alla distanza dall'origine del piano di Gauss del numero complesso di coordinate $(\mathrm{Re}(z); \mathrm{Im}(z))$



Se $|a|$ indica la distanza in modulo dall'origine del punto di coordinate $(a;0)$ e $|b|$ la distanza dall'origine del punto di coordinate $(0;b)$, la distanza dall'origine del punto $z \equiv (a;b)$ sarà definita, mediante il teorema di Pitagora, dall'espressione $|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$

Ossia, il modulo di un numero complesso z è pari a $\underline{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad |z| = |\bar{z}|$

Vediamo le relazioni tra numeri complessi, coniugati e moduli:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \begin{cases} z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (bi - bi) = 2a \\ z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (bi + bi) = 2bi \\ z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ab)i = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Dalle relazioni si deduce che: $\underline{\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} \qquad \rho^2 = z \cdot \bar{z}}$

6. Divisione tra numeri complessi: si definisce $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$ la divisione $\dfrac{z}{w}$ come:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Cioè si moltiplica sia al numeratore che al denominatore per il coniugato del denominatore, in modo tale da far scomparire la *i* al divisore e procedere semplicemente con il prodotto.

Quindi $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{ac-bd+(ad+bc)i}{|c+di|^2} = \dfrac{ac-bd+(ad+bc)i}{c^2+d^2}$

Proprietà del modulo di *z*

$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \quad |z+w| \le |z| + |w|$ <u>disuguaglianza triangolare</u>

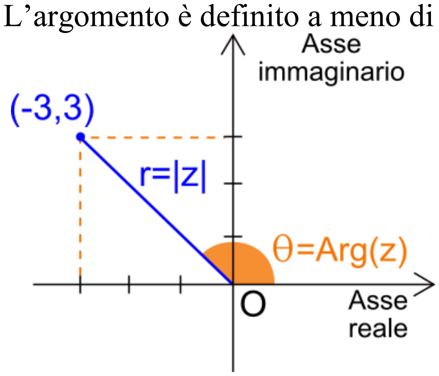
$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot |w|^2$ <u>uguaglianza del parallelogramma</u>

$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Argomento di un numero complesso $\arg(z)$

L'argomento di un numero complesso *z* è l'angolo ϑ misurato in radianti formato dalla semiretta reale positiva e la semiretta da 0 che passa in $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

L'argomento è definito a meno di aggiunta di multipli interi di 2π



Ad esempio il numero complesso $w = -3+3i$ ha argomento $\arg(w) = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi$

$\forall\, z \neq 0 \in \mathbb{C}$ e $\forall\, c \in \Re$, i multipli reali di *z* in $\mathbb{C}$ sono gli elementi della stessa retta che contiene 0 e *z*. Quindi, siccome tra due rette, qualunque sia la loro lunghezza, è compreso sempre un angolo, l'argomento di *z* e di tutti i suoi multipli positivi è lo stesso.

Se consideriamo un numero complesso *z* appartenente a una retta per l'origine, il numero appartenente alla stessa semi-retta ma avente modulo 1 sarà $\dfrac{z}{|z|}$;

infatti $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{\big||z|\big|} = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$

Prima di vedere come calcolare l'argomento di numeri complessi associati ad angoli non notevoli, definiamo due forme alternative con cui esprimere un numero in $\mathbb{C}$

FORMULA DI EULERO

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \cdot \sin(\vartheta) \qquad \forall\, \vartheta \in \Re}$$

Quindi, ad esempio per $\vartheta = 0$, $e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$ $\quad 1 = 1$

per $\vartheta = \pi$ $\quad e^{i\cdot\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$ $\quad e^{i\cdot\pi} = -1$

Dall'ultima uguaglianza, si ricava l'equazione più affascinante della matematica, che contiene i 5 numeri fondamentali: 0,1, π, *e*, *i* : $\underline{e^{i\cdot\pi} + 1 = 0}$

L'argomento e il modulo di $e^{i\vartheta}$ sono definiti da $\arg\left(e^{i\vartheta}\right) = \vartheta + 2k\pi$ e $\rho = \sqrt{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)} = 1$

La formula di Eulero definisce le forme esponenziale e trigonometrica di un numero complesso.
$\forall\, z \in \mathbb{C}$, si definiscono le seguenti forme alternative per esprimere un complesso:

forma esponenziale	$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$
forma trigonometrica	$z = \rho \cdot (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$

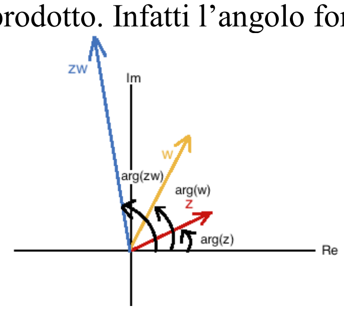
con $\rho \geq 0$ modulo del numero complesso e $\vartheta \in \Re$ argomento del numero complesso

Attraverso queste forme si definiscono le coordinate polari di un numero complesso *z*.
$\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ sono chiamate <u>coordinate cartesiane</u> di *z*.
ρ e $\arg(z)$ sono chiamate <u>coordinate polari</u>
Le coordinate polari sono utili a determinare l'interpretazione geometrica del prodotto tra numeri complessi.
Essa si basa sulla seguente affermazione : $\underline{\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)}$
Infatti, ponendo $z = \rho \cdot (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ e $w = r \cdot (\cos\omega + i \sin\omega)$, zw è uguale a

$$zw = \rho \cdot r \cdot (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)(\cos\omega + i \sin\omega) =$$

$$= \rho \cdot r(\cos\vartheta\cos\omega + \cos\vartheta \cdot i \sin\omega + i \sin\vartheta\cos\omega - \sin\vartheta\sin\omega)$$

Riscrivendo la quantità tra parentesi attraverso le formule di duplicazione di seno e coseno
$zw = \rho \cdot r(\cos(\vartheta + \omega) + i \sin(\vartheta + \omega))$; l'argomento di questo numero è
$\arg(zw) = \vartheta + \omega$, dove ϑ è l'argomento di z e ω è l'argomento di *w*.
Dunque, conoscendo due numeri complessi *z* e *w*, conosciamo anche la relazione che hanno con il loro prodotto. Infatti l'angolo formato da *zw* è pari alla somma degli angoli formati da *z* e *w*.



Leggi di trasformazione tra coordinate diverse

1. Vediamo come passare dalla forma polare alla forma cartesiana di un numero complesso.
Dato $z=\rho\cdot e^{i\vartheta}$, sappiamo che è equivalente scrivere $z=\rho\cdot(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$
Risolvendo le parentesi nell'ultima equazione, otteniamo $z=\rho\cos\vartheta+i\rho\sin\vartheta$,
dove $\rho\cos\vartheta=\operatorname{Re}(z)$ e $\rho\sin\vartheta=\operatorname{Im}(z)$

2. Il passaggio dalla forma cartesiana a quella polare non è di così semplice attuazione.
Dato $z=\operatorname{Re}(z)+i\cdot\operatorname{Im}(z)$, vogliamo trovare $|z|$ e $\arg(z)$

Per trovare il modulo, non c'è problema: conosciamo la formula $|z|=\sqrt{\operatorname{Re}^2(z)+\operatorname{Im}^2(z)}$
Per l'argomento, bisogna eseguire dei calcoli preliminari.
Consideriamo il rapporto tra le parti immaginaria e reale di z : $\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$

Dato che $\operatorname{Im}(z)=\rho\cdot\sin(\arg(z))$ e $\operatorname{Re}(z)=\rho\cdot\cos(\arg(z))$, è possibile scrivere
$\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=\dfrac{\sin(\arg(z))}{\cos(\arg(z))}$; ma il seno di un angolo diviso per il coseno di un angolo dà come risultato la tangente dell'angolo stesso. Quindi $\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=\tan(\arg(z))$

L'argomento di z sarà dato da $\arg(z)=\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$, dove arctan è la funzione inversa di tan.

Questa formula, però, non è sempre corretta: l'arcotangente è una funzione definita solo per $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, mentre l'angolo di un numero complesso può assumere anche altri valori.
È necessario dunque guardare alla casistica sulla posizione di z nel piano di Gauss e comportarsi di conseguenza, apportando le dovute modifiche alla formula.
Riportiamo uno schema con il valore di $\arg(z)$ in tutti i casi possibili:

$$\vartheta=\arg(z)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi & se\quad \operatorname{Re}(z)=0\ ,\ \operatorname{Im}(z)>0\\[2mm] \dfrac{3}{2}\pi+2k\pi & se\quad \operatorname{Re}(z)=0\ ,\ \operatorname{Im}(z)<0\\[2mm] non\ definito & se\quad \operatorname{Re}(z)=0\ ,\ \operatorname{Im}(z)=0\\[2mm] \left(\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)\right)+2k\pi & se\quad \operatorname{Re}(z)>0,\ \cancel{\operatorname{Im}(z)\geq 0}\\[2mm] \cancel{\left(\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)+2\pi\right)+2k\pi\quad se\quad \operatorname{Re}(z)>0,\ \operatorname{Im}(z)<0}\\[2mm] \left(\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)+\pi\right)+2k\pi & se\quad \operatorname{Re}(z)<0,\ \cancel{\operatorname{Im}(z)\ qualsiasi}\end{cases}$$

Formula di de Moivre per le potenze in $\mathbb{C}$

Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $n \in \aleph$ si ha

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)]}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio non identicamente nullo di grado $n \geq 0$. Allora $p(t)$ ha esattamente *n* radici, contate con la relativa molteplicità

Definizione di molteplicità di una radice:
Consideriamo un polinomio $\mathbb{C}[z]$ a coefficienti reali o complessi e sia $n \geq 1$ un numero naturale. Si dice che t_0 è una radice di $p(t)$ con molteplicità *n* se e solo se $p(t)$ è divisibile per $(t - t_o)^n$ ma non è divisibile per $(t - t_o)^{n+1}$. Ossia la molteplicità di una radice è il numero di volte che compare il fattore $(t - t_o)$ nella fattorizzazione massimale.

Fattorizzare un polinomio a coefficienti complessi significa esprimerlo come prodotto di *n* fattori di grado 1.
Nel campo dei numeri reali, non sempre la fattorizzazione massimale corrisponde al prodotto di fattori di grado 1.
Ad esempio, il polinomio $t^3 - t^2 + t - 1$ è fattorizzabile come $(t^2 + 1)(t - 1)$. Nella fattorizzazione massimale compare un fattore di grado 2 non scomponibile ulteriormente.
Nei numeri complessi ciò non avviene: a polinomi di grado *n* corrispondono esattamente *n* radici.

Ma come si trova la radice di un numero complesso?
Dalla formula di de Moivre si ricava che:

se $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ allora le radici distinte *n*-esime $z_0, ...z_{n-1}$ di *w* sono date da:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

con $k = 0, ... , n-1$
e $\sqrt[n]{\rho}$ l'unica radice *n*-esima di ρ

Lo spazio $\Re^n$

Con spazio $\Re^n$ si intende lo spazio vettoriale a coefficienti reali e di dimensione *n*. Prima di definire il concetto di spazio vettoriale (e la definizione associata di campo), vediamo le caratteristiche del caso particolare (ossia $\Re^n$), che poi verranno estese a tutti i tipi di spazi.

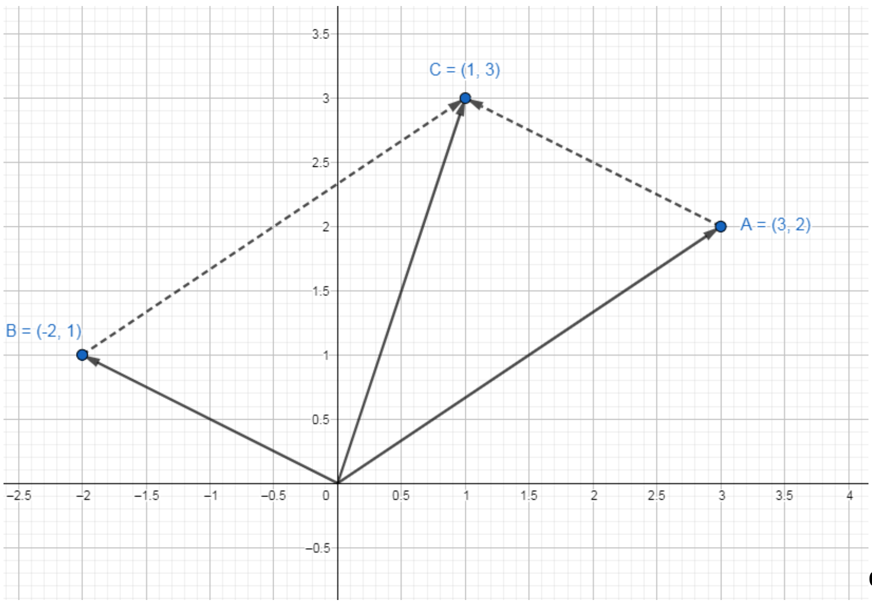
$(a_1, a_2, ..., a_n)$ è definita n - upla di numeri reali. Prende il nome di **vettore** o punto di $\Re^n$

Le operazioni ammissibili in $\Re^n$ sono la somma e il prodotto.

La somma tra due vettori appartenenti allo spazio dà come risultato un altro vettore.

$$(a_1,..., a_n) + (b_1,..., b_n) = (a_1 + b_1,..., a_n + b_n)$$

Geometricamente, il vettore somma è dato dalla regola del parallelogramma:



esempio in spazio $\Re^2$

La somma in $\Re^n$ gode delle stesse proprietà che in R: **commutatività**, **associatività**, dell'elemento neutro (0) e dell'esistenza dell'opposto (l'opposto di $v = (a_1, a_2, ...a_n)$ è $-v = (-a_1, -a_2, ... -a_n)$)

Il **prodotto per scalare** avviene tra un numero reale $c \in \Re$ e un vettore $v \in \Re^n$

$$c \cdot (a_1, a_2 .....a_n) = (ca_1, ca_2, ...ca_n)$$

dato $v \in \Re^n$, i suoi multipli $c \cdot v$ sono gli elementi della stessa retta.

Il prodotto per scalare gode di: associatività (solo tra scalari), elemento neutro (1), opposto e distributività.

È giusto ed opportuno fare un confronto tra i vettori e i numeri complessi. Identificando ogni vettore (*a*, *b*) $\in \Re^2$ con il numero *a* + *ib*, le operazioni corrispondono:

$$a + ib + a' + ib' = (a + a') + (b + b')i \quad \rightarrow \quad (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

Analogo per il prodotto.

Il prodotto scalare
Il prodotto scalare (non "per scalare") associa ad ogni <u>coppia di vettori</u> uno scalare $c \in \Re$

$$(a,...,a_n) \cdot (b,...,b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

Può accadere che due vettori $\vec{v}, \vec{w} \neq 0$ diano come prodotto 0:
es. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6 & 6 & 2\end{pmatrix} = 6 - 12 + 6 = 0$

Il prodotto scalare gode di commutatività, associatività (mista), distributività (queste due garantiscono la bilinearità del prodotto).
Inoltre il prodotto scalare è <u>non degenere</u>, ossia per ogni vettore $v \in \Re^n$ ≠0 esiste un vettore $w \in \Re^n$ tale che $v \cdot w \neq 0$. Dal momento che il prodotto scalare è 0 quando i due vettori sono ortogonali (perpendicolari tra loro), la proprietà dice che per ogni vettore diverso da zero ne esiste almeno un altro ad esso non perpendicolare.
Il prodotto scalare è <u>definito positivo</u>, ossia per ogni $v \in \Re^n$, $v \neq 0$ $\quad v \cdot v > 0$

La norma
La norma di un vettore *v* è la lunghezza di tale vettore, cioè la sua distanza dall'origine degli assi.

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v \cdot v}} \quad , \quad \forall v \in \Re^n$$

es. $v = \begin{pmatrix}1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ $\quad \|v\| = \sqrt{(1,-2,5) \cdot (1,-2,5)} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$

Le proprietà della norma:
- $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$

$$\boxed{\big|\, \|v\| - \|w\| \,\big| \le \|v + w\| \le \|v\| + \|w\|}$$

- subadditività (o **disuguaglianza triangolare**) : $\forall v, w \in \Re^n$

La disuguaglianza triangolare è chiamata così perché può essere interpretata come l'affermazione che un lato del triangolo di vertici 0, v e $v + w$ è più corto della somma e più lungo della differenza delle lunghezze degli altri due lati, un risultato classico della geometria euclidea dei triangoli.

- $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$ $\quad \forall v \in \Re^n$ e $\forall c \in \Re$
- **identità del parallelogramma** : $\forall v, w \in \Re^n$ $\quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2 \cdot \|v\|^2 + 2 \cdot \|w\|^2$

Date le norme di due vettori, è possibile conoscere il valore del loro prodotto scalare tramite le <u>identità di polarizzazione</u>:

$$v \cdot w = \frac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2} \quad ; \quad v \cdot w = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\forall v, w \in \Re^n \qquad \boxed{|v \cdot w| \le \|v\| \cdot \|w\|}$$

(l'uguaglianza vale solo se *v* e *w* sono linearmente dipendenti)
Eliminando il modulo al primo membro, è equivalente scrivere la disuguaglianza come:

$$-\|v\| \cdot \|w\| \le v \cdot w \le \|v\| \cdot \|w\|$$

Vediamo perché:
Chiamiamo $\|v\| = a$ e $\|w\| = b$ e consideriamo i vettori $bv - aw$ e $bv + aw$

$\|bv - aw\|^2 = (bv - aw) \cdot (bv - aw) = bv \cdot bv - bv \cdot aw - aw \cdot bv + aw \cdot aw = b^2 (v \cdot v) + 2ab(v \cdot w) + a^2 (w \cdot w)$

Ma $v \cdot v = \|v\|^2 = a^2$ e $w \cdot w = \|w\|^2 = b^2$: $a^2 b^2 - 2ab(v \cdot w) + a^2 b^2 = 2a^2 b^2 - 2ab(v \cdot w)$

Mettendo in evidenza $2ab$ otteniamo: $2ab(ab - (v \cdot w))$

La quantità tra parentesi, essendo la norma di un vettore sempre positiva, è positiva se $ab \ge v \cdot w$

Ripetendo i calcoli col vettore $bv + aw$, otteniamo che $ab + v \cdot w \ge 0 \Leftrightarrow v \cdot w \ge -ab$

Quindi possiamo dedurre che $-ab \le v \cdot w \le ab$

Ma $a = \|v\|$ e $b = \|w\|$, dunque $-\|v\| \cdot \|w\| \le v \cdot w \le \|v\| \cdot \|w\|$ c.v.d.

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ci permette di definire l'angolo fra due vettori.

Supponendo che $v, w \ne 0 \to \|v\|, \|w\| \ne 0$ possiamo dividere per $\|v\| \cdot \|w\|$ tutti i membri della disequazione: $-1 \le \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \le 1$ che è proprio il codominio delle funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$

Diremo dunque *angolo* fra *v* e *w* quel numero reale $v\hat{}w \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos(v\hat{}w) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

La disuguaglianza ci dice che il rapporto a secondo membro è in modulo minore o uguale a 1, per cui è il coseno di qualcosa; ed essendo il coseno una funzione iniettiva nell'intervallo $[0, \pi]$, abbiamo definito in modo univoco l'angolo fra *v* e *w*.

Infatti, tramite la formula inversa, avremo che $v\hat{}w = \arccos\left(\dfrac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$

Il caso di uguaglianza nella formula di Cauchy-Schwarz ci dice che due vettori *v* e *w* sono linearmente dipendenti se e solo se il coseno del loro angolo è uguale a ± 1, cioè se e solo se formano un angolo di 0 o π radianti, com'è giusto che sia. D'altro canto, formano un angolo di $\pi/2$ se e solo se il coseno è zero, cioè se e solo se $v \cdot w = 0$.

Da ciò deduciamo che:
$\forall v, w \in \Re^n$, sia $v \cdot w$ il prodotto scalare fra *v* e *w*. I due vettori si dicono *ortogonali* (o *perpendicolari*) se $v \cdot w = 0$, e scriveremo $v \perp w$.

Analizziamo i casi previsti dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

1. $v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\|$ allora $\widehat{vw} = \arccos(1) = 0$

2. $0 < v \cdot w < \|v\| \cdot \|w\|$ allora $0 < \widehat{vw} < \dfrac{\pi}{2}$ l'angolo è acuto

3. $v \cdot w = 0$ allora $\widehat{vw} = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ i vettori sono ortogonali

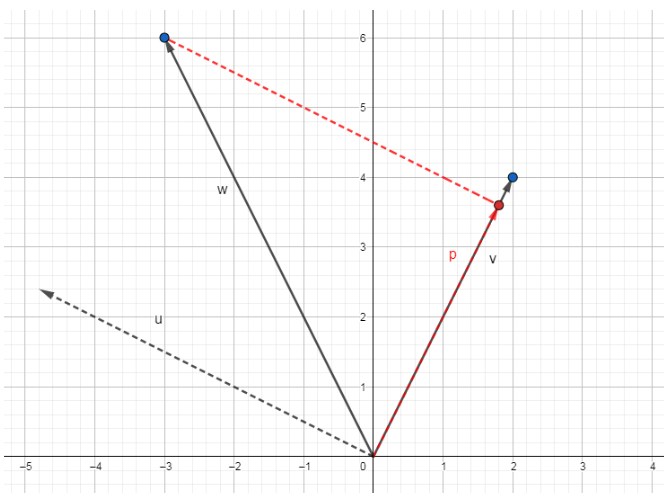
4. $-\|v\| \cdot \|w\| < v \cdot w < 0$ allora $\dfrac{\pi}{2} < \widehat{vw} < \pi$ l'angolo è ottuso

5. $v \cdot w = -\|v\| \cdot \|w\|$ allora $\widehat{vw} = \arccos(-1) = \pi$

L'angolo compreso tra due vettori è sempre maggiore o uguale di 0 e minore o uguale di π

Dalla formula appena vista, deduciamo che: $\boxed{v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\widehat{vw})}$

Proiezione ortogonale di un vettore *w* lungo un vettore *v* $\neq 0$



Vediamo di scrivere ciò che sappiamo dapprincipio su questa proiezione $p_v(w)$:

- sicuramente è un multiplo di *v*, giacendo entrambi sulla stessa retta $p_v(w) = c \cdot v$

- Siccome parliamo di proiezione, essa deve essere perpendicolare a *v* : dal momento che per la regola del parallelogramma tale proiezione è uguale in modulo a $w - p_v(w)$ (nel disegno *u*), poniamo $w - p_v(w) \perp v$ e dunque il loro prodotto scalare è nullo: $(w - p_v(w)) \cdot v = 0$

Mettiamo le due condizioni a sistema:

$\begin{cases} p_v(w) = c \cdot v \\ (w - p_v(w)) \cdot v = 0 \end{cases}$ $\quad (w - c \cdot v) \cdot v = 0 \rightarrow w \cdot v - cv \cdot v = 0$ allora $c = \dfrac{w \cdot v}{v \cdot v}$

Quindi, se $p_v(w) = c \cdot v$ si ricava che

$$\boxed{p_v(w) = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} \cdot v}$$

<u>è sbagliato semplificare i termini uguali</u>: questa è la forma più ridotta possibile.

Spazi vettoriali

Dopo aver visto le caratteristiche di $\Re^n$, generalizziamo il concetto di spazio vettoriale.

Per fornire una definizione di spazio vettoriale è necessario considerare tre elementi: un **campo**, o campo di scalari, che si indica con K ; un insieme V , chiamato spazio di vettori; due operazioni binarie, $+$ e $\cdot$, chiamate somma di vettori e prodotto di un vettore per uno scalare.

Si definisce **campo** (o corpo commutativo) un insieme K dotato di operazioni somma e prodotto per scalare, le quali godono delle proprietà già viste per il caso di $\Re^{\cancel{n}}$: <u>commutatività</u> (somma e prodotto), <u>associatività</u> (somma e prodotto) , <u>elemento neutro</u> (0 per la somma, 1 per il prodotto), <u>elemento opposto</u> (somma), <u>elemento inverso</u> (prodotto), <u>distributività</u> (prodotto rispetto a somma). e 0≠1

Uno spazio vettoriale sul campo K è un insieme V dotato di due operazioni:

somma $\quad V \times V \to V \qquad \forall v \in V \qquad$ associa a due elementi di V un elemento di V

prodotto $\quad \mathrm{K} \times V \to V \qquad \forall v \in V \quad \forall k \in \mathrm{K} \quad$ associa a un elemento di K e uno di V un elemento di V

Anche gli spazi vettoriali godono delle proprietà già viste :

(a) $\forall u,v,w \in V \ \ (u+v)+w = u+(v+w)$ *associatività della somma*

(b) $\forall v \in V \ \ \exists\, \underline{0} \ / \ v+\underline{0} = \underline{0}+v = v$ *esiste l'elemento neutro per la somma*

(c) $\forall v \in V \ \ \exists -v \ / \ \ v+(-v) = (-v)+v = \underline{0}$ *esiste l'opposto per la somma*

(d) $\forall v,w \in V \quad v+w = w+v$ *commutatività della somma*

(e) $\forall v,w \in V \ \forall k \in \mathrm{K} \ \ k\cdot(v+w) = kv+kw$ *distributività del prodotto per scalari*

(f) $\forall v \in V \ \ \forall k,c \in \mathrm{K} \ \ (k+c)\cdot v = kv+cv$

(g) $\forall v \in V \ \ \forall k,c \in \mathrm{K} \ \ (kc)\cdot v = k\cdot(cv)$ *associatività del prodotto per scalari*

(h) $\forall v \in V \ 1v = v$ ~~e $0v=\underline{0}$~~

Esempi di spazio vettoriale

1. $V = \Re^n \qquad \mathrm{K} = \Re$ ossia il caso particolare trattato precedentemente

2. $V = \mathbb{C}^n \qquad \mathrm{K} = \mathbb{C}$ ossia l'insieme delle *n*-uple $(z_1 \ldots z_n)$ con $z_1 \ldots z_n$ coefficienti complessi.

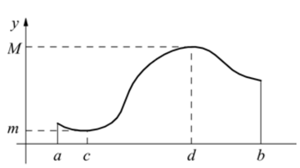
3. $V = M_{m\times n}(\Re) \qquad \mathrm{K} = \Re$ l'insieme delle matrici m×n a coefficienti reali

4. $V = \Re_n[t] \qquad \mathrm{K} = \Re$ l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t di grado $\le n$

ad esempio $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot t^j$

5. $V =$ Lin $(\Re^n, \Re^m) \qquad \mathrm{K} = \Re$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : \Re^n \to \Re^m$

6. ~~Anche un sottoinsieme può essere considerato spazio vettoriale. Ad esempio un intervallo reale di un'applicazione lineare *f*.~~



Se chiamiamo l'intervallo $[a;b]$ S, lo spazio vettoriale è l'insieme $V = \{f : S \to \Re\}$ con $\mathrm{K} = \Re$

Sottospazi vettoriali

Dato uno spazio vettoriale V sul campo K, un sottospazio vettoriale di V è un <u>sottoinsieme</u> $W \subseteq V$ chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, ~~cioè tale che $w_1 + w_2 \in W$ e $kw \in W$ per ogni $w, w_1, w_2 \in W$ e $k \in K$.~~ e che contiene il vettore 0:

- $\underline{0} \in W$
- $\forall\, w, w' \in W \qquad w + w' \in W$
- $\forall\, w \in W \;\; \forall\, c \in \mathrm{K} \qquad c \cdot w \in W$

Ossia le operazioni di somma e prodotto per scalare applicate nel sottoinsieme valgono <u>internamente</u> al sottospazio.

<u>Esempio</u>

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \;/\; x + y + z = 0 \right\} \qquad \mathrm{K} = \Re$$

Verifichiamo le condizioni per cui W è uno spazio vettoriale:

- $0 \in W$ perché $0 + 0 + 0 = 0$

- dati $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \overset{W}{\cancel{\Re^3}}$, vediamo se la loro somma rimane in W.

Il vettore somma $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$, per appartenere a W, deve rispettare la condizione:

$$(x + x') + (y + y') + (z + z') = 0 \qquad (x + y + z) + (x' + y' + z') = 0 \qquad 0 = 0$$

- dati $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overset{W}{\cancel{\Re^3}}$ e $c \in \Re \qquad c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \qquad$ vediamo se $c \cdot (x + y + z) = 0 \qquad c \cdot 0 = 0 \qquad 0 = 0$

W è un sottospazio vettoriale di $\Re^3$

$\forall\, V$ su K, il più piccolo sottospazio vettoriale di V è l'insieme formato solo da 0 $\{0\}$
$\forall V$ su K, il più grande sottospazio vettoriale di V è l'insieme V stesso.

Operazioni con sottospazi vettoriali

Siccome i sottospazi vettoriali sono degli insiemi, viene spontaneo pensare alle operazioni di unione e intersezione. Ricordiamole entrambe brevemente:
L'unione di due insiemi è ~~un'operazione che restituisce~~ l'insieme contenente tutti gli elementi del primo insieme e del secondo insieme. In termini rigorosi, l'unione di due insiemi $A, B \subseteq E$ è l'insieme definito da $$A \cup B := \{x \in E \ / \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$
L'intersezione di due insiemi è ~~un'operazione che permette di individuare~~ l'insieme degli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi dati. Più precisamente, prendiamo due insiemi $A, B \subseteq E$, dove E indica l'insieme universo, e definiamo l'intersezione tra A, B come

$$A \cap B := \{x \in E \ / \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Dato uno spazio vettoriale V sul campo K e dati due suoi sottospazi $W, \ W'$, è possibile eseguire le operazioni di unione e di intersezione $W \cup W'$ e $W \cap W'$
Gli insiemi unione e intersezione tra due sottospazi vettoriali sono anch'essi sottospazi? Il primo generalmente non lo è, mentre il secondo lo è sempre.

Dimostriamo entrambe le affermazioni.

1. Dato V su K, e dati i suoi sottospazi $W, \ W'$, $W \cup W'$ non è sottospazio di V.

Per dimostrare ciò dobbiamo far riferimento alle tre condizioni dei sottospazi vettoriali.

- Essendo $W, \ W'$ dei sottospazi per ipotesi, il vettore nullo è contenuto in entrambi. Se è contenuto in entrambi è sicuramente contenuto nell'insieme dato dalla loro unione. Perciò la prima condizione è verificata $\underline{0} \in W \cup W'$

- $\forall w \in W \cup W' \ \ \forall k \in \mathrm{K}$, deve essere vero che $kw \in W \cup W'$
vanno distinti due casi: il primo $\forall w \in W$ e il secondo $\forall w' \in W'$
I. se w appartiene a W, anche kw appartiene a W (perché W è un sottospazio per ipotesi) e dunque kw appartiene anche a $W \cup W'$ (basta che appartenga a uno dei due).

II. $\forall w' \in W'$ si dimostra in modo del tutto analogo.

- $\forall u, w \in W \cup W'$ deve essere vero che $u + w \in W \cup W'$
Stavolta vanno distinti quattro casi: il primo $\forall u, w \in W$ il secondo $\forall u, w \in W'$, il terzo $\forall w \in W \ \ \forall u \in W'$ il quarto $\forall u \in W \ \ \forall w \in W'$
I, II. I primi due casi sono veri per definizione di sottospazio vettoriale.

III. se w ed u appartengono a due spazi differenti, ~~la loro somma (vettoriale) è definita mediante la regola del parallelogramma; quindi,~~ in generale $u + w \notin W \cup W'$

IV. Questo caso è analogo al caso precedente: w ed u appartengono ancora a due spazi differenti e la loro somma, in generale, non giacerà nello stesso spazio di nessuno dei due addendi.
Poiché l'ultima condizione non è sempre verificata, $W \cup W'$ non è un sottospazio di V.

2. Dato *V* su K, e dati i suoi sottospazi W, W', $W \cap W'$ è sottospazio di *V*.

Anche stavolta, dobbiamo far riferimento alle tre condizioni dei sottospazi vettoriali

- Essendo W, W' dei sottospazi per ipotesi, il vettore nullo è contenuto in entrambi. Se è contenuto in entrambi è contenuto nell'insieme dato dalla loro intersezione. Perciò la prima condizione è verificata $\underline{0} \in W \cap W'$

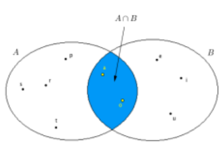
- $\forall w \in W \cap W'$ $\forall k \in K$, deve essere vero che $kw \in W \cap W'$
vanno distinti due casi: il primo $\forall w \in W$ e il secondo $\forall w' \in W'$
I. se *w* appartiene a *W*, anche *kw* appartiene a *W* (perché *W* è un sottospazio per ipotesi)
II. se *w'* appartiene a *W'*, anche *kw'* appartiene a *W'* (perché *W'* è un sottospazio per ipotesi)
Dunque, dal momento che *kw* appartiene a entrambi i sottospazi, è vero che appartiene alla loro intersezione $kw \in W \cap W'$

- $\forall u, w \in W \cap W'$ deve essere vero che $u + w \in W \cap W'$
se $u, w \in W \cap W'$ allora è sicuramente vero che $u, w \in W$ e $u, w \in W'$;
e, essendo *W* e *W'* sottospazi per ipotesi, è vero anche che $u + w \in W$ e $u + w \in W'$
se $u + w$ appartiene sia a *W* che a *W'*, allora appartiene anche alla loro intersezione

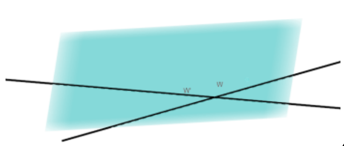
$u + w \in W \cap W'$ c.v.d.

Dal momento che verifica tutte le condizioni, $W \cap W'$ è sottospazio di *V*. -----
----

$\forall$ *V* su K, il più grande sottospazio *U* contenuto in due sottospazi di *V* chiamati *W* e *W'* è l'insieme formato dall'intersezione tra *W* e *W'*. Il più grande sottospazio $U \ / \ U \subseteq W, W'$ è $W \cap W'$



$\forall$ *V* su K, il più piccolo sottospazio *U* conten~~uto in~~ente due sottospazi di *V* chiamati *W* e *W'* non è l'insieme formato dall'unione di *W* e *W'* (abbiamo infatti già visto che $W \cup W'$ non è un sottospazio di *V*). Tale sottospazio è invece dato dall'insieme somma tra *W* e *W'* .Il più piccolo sottospazio $U \ / \ U \overset{\supseteq}{\cancel{\subseteq}} W, W'$ è $W + W'$. Tale insieme è formato da tutte le possibili somme tra tutti gli elementi $w \in W$ e $w' \in W'$.$\underline{W + W' = \{w + w' / w \in W, \ w' \in W'\}}$ Ad esempio, se *W* e *W'* sono due rette , $W + W'$ sarà l'espressione del **piano** contenente le due rette.



Ovviamente $W + W'$ è un'insieme ~~più grande di~~ contenente $W \cup W'$

Dimostriamo che $W+W'$ è un sottospazio vettoriale di V verificando le tre condizioni.

- Essendo $W,\ W'$ dei sottospazi per ipotesi, il vettore nullo è contenuto in entrambi. Se è contenuto in entrambi è contenuto nell'insieme dato dalla loro somma. Perciò la prima condizione è verificata $\underline{0}\in W+W'$

- $\forall\, w+w'\in W+W'\quad \forall\, k\in \mathrm{K}$, deve essere vero che $k(w+w')\in W+W'$
applichiamo la proprietà distributiva: $k(w+w')=kw+kw'$
kw appartiene a *W* per ipotesi, *kw'* appartiene a *W'* per ipotesi; la somma di due elementi appartenenti ai due insiemi addendi appartiene all'insieme somma. $kw+kw=k(w+w')\in W+W'$

- $\forall\, w+w',u+u'\in W+W'$ deve essere vero che $(w+w')+(u+u')\in W+W'$
applichiamo le proprietà associativa e commutativa: $\cancel{(u+w)+(u'+w')}=(u+w)+(u'+w')$
$u+w$ appartiene a *W* per ipotesi, $u'+w'$ appartiene a *W'* per ipotesi; la somma di due elementi appartenenti ai due insiemi addendi appartiene all'insieme somma .
$(\overset{w'}{\cancel{u}}+w)+(u'+\overset{u}{\cancel{w'}})=(u+w)+(u'+w')\in W+W'$ c.v.d.

Somma diretta tra sottospazi vettoriali
Dato *V* su K, e dati i suoi sottospazi *W* e W', l'espressione di un elemento di $W+W'$ come somma di un elemento $w\in W$ e di un elemento $w'\in W'$ può non essere unica.
Vediamo subito degli esempi, e poi definiamo il concetto:

$V=\Re^3$ Siano $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}:x,y\in\Re\right\}$ $W'=\left\{\begin{pmatrix}\overset{0}{\cancel{x}}\\y'\\\overset{z}{\cancel{0}}\end{pmatrix}:\overset{z}{\cancel{x}},y'\in\Re\right\}$

l'insieme $W+W'$ sarà dato da $W+W'=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y'\\z\end{pmatrix}:x,y,y',z\in\Re\right\}$

Ossia da tutti i vettori $\begin{pmatrix}x\\y+y'\\z\end{pmatrix}$; cercando i valori di *x, y, y'* e *z* per cui il vettore somma sia uguale a un vettore generico $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, è necessario impostare il sistema $\begin{cases}x=a\\y+y'=b\\c=z\end{cases}$, un sistema con quattro incognite e tre equazioni. Non è difficile accorgersi che tale sistema presenta infinite soluzioni.
Ossia in questo esempio la scrittura di $W+W'$ non è unica.

Se *W* e *W'* fossero stati definiti diversamente, ad esempio come $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}:x,y\in\Re\right\}$ $W'=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}:\cancel{y',}\,z\in\Re\right\}$

L'uguaglianza $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sarebbe stata verificata solo per $x=a\quad y=b\quad z=c$

Definiamo allora cos'è la somma diretta:
Dato V su K, i suoi sottospazi W e W' si dicono in <u>somma diretta</u> se qualunque elemento di $W+W'$ si può esprimere in modo unico come somma di un elemento di W e di un elemento di W'.
Nei due esempi appena visti, W e W' <u>non</u> sono in somma diretta nel primo caso, mentre lo sono nel secondo.

Se W e W' sono in somma diretta, la loro somma si indica con $W \oplus W'$

Teorema: W e W' sono in somma diretta <u>se e solo se</u> $W \cap W' := \{0\}$

Dimostriamo l'affermazione in entrambi i versi dell'implicazione.

I. $W \cap W' := \{0\} \quad \Rightarrow \quad W \oplus W'$
Per ogni v appartenente a $W + W'$, voglio mostrare l'unicità di $w+w'$ con $w \in W \quad w' \in W'$
Supponiamo che non sia vero. Allora $v = w + w'$ si può scrivere in più di un modo.
v si può scrivere sia come $w+w'$ che, ad esempio, come $u+u'$, con $u \in W \quad u' \in W'$
Quindi è vero che $w + w' = u + u' = v$, ossia $w - u = w' - u' = v$
$w - u$ appartiene a W per definizione di sottospazio vettoriale, così come $w' - u'$ appartiene a W'.
Ma allora v è esprimibile mediante due diverse espressioni che appartengono a sottospazi vettoriali diversi. L'unico caso in cui tale affermazione è vera è quando $w - u = w' - u' \in W \cap W'$
Per ipotesi, però, l'unico elemento di $W \cap W'$ è l'elemento 0. Quindi sicuramente $w - u = w' - u' = 0$
e $w = u \quad w' = u'$. L'espressione di $w+w'$ è unica. c.v.d.

II. $W \oplus W' \quad \Rightarrow \quad W \cap W' := \{0\}$
Per ogni v appartenente a $W \cap W'$, voglio mostrare che $v = 0$
È da notare che, per ogni spazio V e per ogni W e W' suoi sottospazi, vale la seguente relazione:
$\{0\} \subseteq W \cap W' \subseteq W, W' \subseteq W \cup W' \subseteq W + W' \subseteq V$

Quindi, se $v \in W \cap W'$ allora $v \subseteq W + W'$

Supponiamo di scrivere v in due modi diversi: $\begin{cases} v + 0 & v \in W,\ 0 \in W' \\ 0 + v & 0 \in W,\ v \in W' \end{cases}$
Ma per ipotesi W e W' sono in somma diretta: perciò deve essere vero che $v + 0 = 0 + v$
L'uguaglianza è vera solo se $v = 0$ c.v.d.

Somma tra più sottospazi vettoriali

Dati $W_1,...,W_k$ sottospazi vettoriali di uno spazio *V*, si definisce la loro somma come

$$\sum_{j=1}^{k} W_j = W_1 + W_2 + ... + W_k = \{w_1 + w_2 + ... + w_k \,:\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 .... w_k \in W_k\}$$

ossia l'insieme formato da tutte le somme di tutti gli elementi di tutti i sottospazi sommati.

Tale somma si dice <u>diretta</u> se $\forall v \in \sum_{j=1}^{k} W_j$ i vettori $w_1 \in W_1,..., w_k \in W_k \;/\; \sum_{j=1}^{k} w_j = v$ sono unici.

Per esprimere in modo più compatto la somma diretta tra più spazi vettoriali si può usare la notazione $\bigoplus_{j=1}^{k} W_j$

Abbiamo già visto che, se *k* è 2, vale l'implicazione $W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 := \{0\}$

Se $k \geq 3$ l'implicazione vale solo in un verso; cioè è vero che $W_1 \oplus .... \oplus W_k \Rightarrow W_1 \cap .... \cap W_k := \{0\}$ ma non è vero che se l'intersezione tra più sottospazi contiene solo l'elemento nullo allora i sottospazi sono in somma diretta.

<u>Esempio</u>

Consideriamo su $V = \Re^2$ i sottospazi $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \Re \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \Re \right\}$ $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \Re \right\}$

si vede facilmente che tutte le intersezioni possibili sono formate dal solo elemento nullo, cioè che $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 := \{0\}$; eppure $W_1 + W_2 + W_3$ non è una somma diretta.

Infatti, considerando ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ si nota che esiste più di una scrittura per esprimerlo:

si può esprimere come $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3$

ma anche come $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_3$

MATRICI

Un aggregato rettangolare di numeri racchiuso entro parentesi, ad esempio

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{oppure} \quad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

e soggetto a determinate regole di operazioni, è chiamato **matrice**. La (*a*) potrebbe essere considerata matrice coefficiente del sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

oppure, matrice aumentata del sistema di equazioni lineari non omogenee:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Nella matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

i numeri o funzioni a_{ij} sono detti elementi. Nella notazione a due pedici, il primo (*i*) indica la riga e il secondo (*j*) la colonna in cui si trova l'elemento. Così, tutti gli elementi della seconda riga hanno 2 come primo pedice e tutti gli elementi della quinta colonna hanno 5 come secondo. Una matrice di *m* righe e *n* colonne è detta matrice di ordine "*m* per *n*", o matrice $m \times n$
Quando è $n \times n$, la matrice è detta quadrata di ordine *n*, o matrice quadrata *n*.
In una matrice quadrata gli elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots, a_{nn}$ sono detti elementi diagonali.
La somma degli elementi diagonali di una matrice quadrata *A* è detta traccia (tr) di A.

Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ si dicono uguali (*A* = *B*) solo ed esclusivamente se hanno lo stesso ordine, ed ogni elemento dell'una è uguale al corrispondente elemento dell'altra.
La matrice della quale ogni elemento sia zero è detta matrice zero. Quando *A* è una matrice zero e non può verificarsi confusione sul suo ordine, scriveremo *A* = 0.

SOMMA DI MATRICI

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ si definisce loro somma (o differenza) *A* + *B*, la matrice $m \times n$ $C = (c_{ij})$, ogni elemento della quale sia somma (o differenza) dei corrispondenti elementi di *A* e *B*.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\quad a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11}\quad b_{12}\ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}\ b_{m2}\ldots\ldots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11}\quad a_{12} \pm b_{12}\ldots\ldots a_{1n} \pm b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \pm b_{m1}\ a_{m2} \pm b_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per scalare

$\forall c \in \Re$, $\forall A \in M_{m\times n}(\Re)$

si definisce $c \cdot A$ come $c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} ....a_{1n} \\ .... \\ a_{m1} \; a_{m2} ....a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} \quad ca_{12} ....ca_{1n} \\ .... \\ ca_{m1} \; ca_{m2} ....ca_{mn} \end{pmatrix}$

$\forall c \in \Re \quad \forall A \in M_{m\times n}(\Re) \quad \forall B \in M_{n\times p}(\Re) \quad (cA)B = c(AB) = A(cB)$

Trasposizione

La matrice di ordine $n\times m$ che si ottiene scambiando righe e colonne di una matrice *A* di ordine $m\times n$ si dice trasposta di *A* e si indice con ${}^{t}A$

Data $A = \begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} ....a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} ....a_{2n} \\ \\ .... \\ a_{m1} \; a_{m2} ....a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad {}^{t}A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{21} ....a_{m1} \\ a_{12} \; a_{22} ....a_{m2} \\ .... \\ a_{1n} \; a_{2n} ....a_{mn} \end{pmatrix}$

${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$

${}^{t}(cA) = c \cdot {}^{t}A$

MATRICI QUADRATE NOTEVOLI

- matrici <u>simmetriche</u> se ${}^{t}A = A \qquad \forall i, j \in [1;n] \quad a_{ij} = a_{ji}$

con *i* e *j* indici di riga e colonna

es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica. Infatti ${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- matrici <u>antisimmetriche</u> se ${}^{t}A = -A \qquad \forall i, j \in [1;n] \quad a_{ij} = -a_{ji}$

In particolare, per *i* = *j* (ossia per gli elementi sulla diagonale), $a_{ii} = -a_{ii} \longrightarrow = 0$

Le matrici antisimmetriche hanno gli elementi diagonali tutti pari a zero.

- matrici <u>diagonali</u> se $i \neq j \longrightarrow a_{ij} = 0$ cioè tutti gli elementi al di fuori della diagonale sono zero. es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- matrici triangolari
  - superiori se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  - inferiori se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Gli elementi al di sopra / al di sotto della diagonale (quest'ultima esclusa) valgono 0.

m. triangolare superiore $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ m. triangolare inferiore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ e & 9 & 2 \end{pmatrix}$

- Se una matrice diagonale ha tutti gli elementi diagonali pari a 1, essa si chiama **matrice identità** e si indica con il simbolo I_n ; ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Due matrici sono conformabili per il prodotto se e solo se il numero *n* di colonne della prima è uguale al numero *n* di righe della seconda.

$M_{m\times n}(\Re)\times M_{n\times p}(\Re) \longrightarrow M_{m\times p}(\Re)$

Il risultato sarà una matrice con un numero di righe pari a quello del primo fattore e un numero di colonne pari a quello del secondo fattore.

$\forall i = 1....m$; $\forall j = 1....n$; $\forall k = 1...p$,

il prodotto righe per colonne si definisce come la sommatoria dei prodotti tra la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna; la matrice prodotto $C = A\cancel{\times}B$ avrà elementi c_{ik} tali che:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot7+2\cdot11 & 1\cdot8+2\cdot12 & 1\cdot9+2\cdot13 & 1\cdot10+2\cdot14 \\ 3\cdot7+4\cdot11 & 3\cdot8+4\cdot12 & 3\cdot9+3\cdot13 & 3\cdot10+4\cdot14 \\ 5\cdot7+6\cdot11 & 5\cdot8+6\cdot12 & 5\cdot9+6\cdot13 & 5\cdot10+6\cdot14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & 32 & 35 & 38 \\ 65 & 72 & 79 & 86 \\ 101 & 112 & 12\overset{3}{\cancel{2}} & 134 \end{pmatrix}$$

Notiamo che, nell'esempio, *A* possiede 2 colonne, quante sono le righe di *B*. *C*, poi, è formata da 4 colonne (~~quelle di~~ come *B*) e 3 righe (~~quelle di~~ come *A*).

Quindi l'elemento c_{ik} del prodotto è il prodotto scalare della *i*-esima riga del primo fattore con la *j*-esima colonna del secondo fattore.

Proprietà del prodotto tra matrici

-<u>non vale</u> la proprietà commutativa: non ha senso porre $AB=BA$, dal momento che le due matrici potrebbero essere conformabili sono in una direzione, oppure i prodotti potrebbero essere diversi.

- proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$

Verifichiamo che le dimensioni coincidono: abbiamo $A = M_{m\times n}$, $B = M_{n\times p}$, $AB = M_{m\times p}$

dunque C sarà necessariamente $C = M_{p\times q}$ e $(AB)C = M_{m\times q}$

Non è difficile verificare che anche a secondo membro viene una matrice di uguali dimensioni.

<u>Dimostrazione</u>

Per dimostrare che due matrici sono uguali, basta dimostrare che ogni elemento della prima è uguale al corrispondente elemento della seconda.

Dunque poniamo $\forall i = 1....m$; $\forall j = 1....n$; $\forall k = 1...p$; $\forall l = 1....q$ che ogni elemento $i\,l$ della matrice (AB)C di dimensioni $m\times q$ è uguale al corrispondente $i\,l$ della matrice $A(BC)_{m\times q}$

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}\cdot C_{kl} \qquad \text{e} \qquad (A(BC))_{il} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot(BC)_{jl}$$

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot B_{jk}\right)\cdot C_{kl}\right) \qquad (A(BC))_{il} = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{p} B_{jk}\cdot C_{kl}\right)\cdot A_{ij}\right)$$

La C a primo membro e la A a secondo membro possono entrare nella sommatoria più interna, dal momento che non dipendono dai suoi indici:

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot B_{jk}\cdot C_{kl}\right) \qquad (A(BC))_{il} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} A_{ij}\cdot B_{jk}\cdot C_{kl}\right)$$

Dal momento che le sommatorie di entrambe i membri dipendono solo dagli indici j e k , possiamo compattare i tre fattori A, B e C in un unico valore D che dipenda da j e k:

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} D_{jk}\right) \qquad (A(BC))_{il} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} D_{jk}\right)$$

Siccome gli indici j e k indicano rispettivamente i numeri di righe e colonne di una matrice $n\times p$, applicare a una matrice due sommatorie, la prima rispetto all'indice di riga e la seconda rispetto all'indice di colonna, vuol dire sommare uno ad uno tutti gli elementi della matrice stessa (lo stesso dicasi se prima si sommano gli elementi secondo l'indice di colonna, e poi secondo l'indice di riga).

Dunque, è lecito scrivere

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} D_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} D_{jk}\right) \longrightarrow ((AB)C)_{il} = (A(BC))_{il} \qquad \text{c.v.d.}$$

- se A e B sono due matrici diagonali, il loro prodotto è dato dal <u>prodotto termine e termine</u> degli elementi sulla diagonale.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cdot b_1 & & \\ & a_2\cdot b_2 & \\ & & a_3\cdot b_3 \end{pmatrix}$$

- proprietà distributiva $A(B+C)=AB+BC$; $(A+B)C=AC+BC$

- La trasposta di una matrice *AB* è uguale al prodotto della trasposta di *B* per la trasposta di *A*.

$${}^t(AB)= {}^tB\cdot {}^tA$$

Verifichiamo le dimensioni: $A=M_{m\times n}$, $B=M_{n\times p}$, $AB=M_{m\times p}$, ${}^t(AB)=M_{p\times m}$

$${}^tA=M_{n\times m}\ ,\ {}^tB=M_{p\times n}\ ,\ {}^tB\cdot{}^tA=M_{p\times m}$$

$\forall\, i=1....m$; $\forall\, j=1....n$; $\forall\, k=1...p$

<u>Dimostrazione</u>

Come al solito, ved~~pon~~iamo che l'elemento ki della prima matrice $p\times m$ è uguale all'elemento ki della seconda matrice $p\times m$

$$\left({}^t(AB)\right)_{ki} = \left({}^tB\cdot{}^tA\right)_{ki}$$

$$\left({}^t(AB)\right)_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot B_{jk} \qquad \left({}^tB\cdot{}^tA\right)_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\left({}^tB\right)_{kj}\cdot\left({}^tA\right)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk}\cdot A_{ij}$$

è lecito porre $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk}\cdot A_{ij}$ perché i fattori sono scalari, perciò commutano. c.v.d.

- esistenza dell'elemento neutro: è la matrice quadrata I_n che, moltiplicata a una qualsiasi matrice *A*, dà come prodotto la stessa matrice *A*.

$$A\cdot I_n = A = I_{\cancel{n}\,m}\cdot A \qquad \forall A\in M_{m\times n}$$

Ricordiamo che I_n è la matrice che presenta tutti 1 sulla diagonale principale, e tutti zero esternamente ad essa; cioè una matrice tale che ogni suo elemento è del tipo

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\ i=j \\ 0 & ,\ i\neq j \end{cases}$: tale simbolo è noto come <u>delta di Kronecker</u>

<u>Dimostrazione</u> (elemento neutro)

Per dimostrare che $I_n\cdot A$ è uguale ad A, dimostriamo che l'elemento generico *ij* della prima è uguale al generico elemento *ij* della seconda. $\forall\, i=1....m$; $\forall\, j=1....n$ ~~; $\forall\, i'=1.....m$~~

$$(I_n\cdot A)_{ij} = A_{ij}$$

$(I_n\cdot A)_{ij} = \sum_{i'=1}^{m}(I_n)_{ii'}\cdot A_{i'j} \longrightarrow$ dato che I_n è equivalente al delta di Kronecker, scriviamo:

$\sum_{i'=1}^{m}(I_n)_{ii'}\cdot A_{i'j} = \sum_{i'=1}^{m}\delta_{ii'}\cdot A_{i'j}$, che equivale alla somma di tutti i prodotti con $i'=1.....m$, cioè:

$\sum_{i'=1}^{m}\delta_{ii'}\cdot A_{i'j} = \delta_{i1}\cdot A_{1j} + \delta_{i2}\cdot A_{2j}.........+\delta_{im}\cdot A_{mj}$; dato che il delta di Kronecker assumerà il valore zero ogni volta che $i'\neq j$, della somma rimarranno solo i valori con indice di riga *i* che, essendo I_n matrice quadrata, è uguale a i'. Dunque rimarrà solo il valore A_{ij} . c.v.d.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Il determinante, definito solo per le matrici quadrate, è un numero caratteristico che descrive alcune proprietà algebriche e geometriche della matrice.
Il metodo per calcolarlo non è sempre facile, ma ci sono delle regole che consentono di agevolare i conti.
Il determinante di una matrice *A*, indicato con $\det(A)$, è un'applicazione che da una matrice $n \times n$ restituisce un valore scalare $c \in \Re$

~~1.~~ caso $n = 1$: il determinante di una matrice 1×1 del tipo (a), equivale ad *a*.

~~2.~~ caso $n = 2$: il determinante di una matrice 2×2 del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, equivale ad $\underline{ad - bc}$

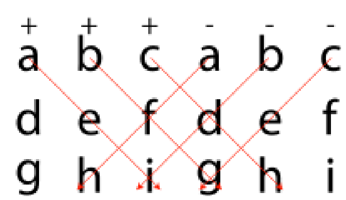
~~2.~~ caso $n = 3$: per calcolare il determinante di una matrice 3×3 del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,

esiste una regola nota come **regola di Sarrus**, <u>esclusiva per le matrici di queste dimensioni.</u>
Essa dice che $\underline{\det(A_{3\times 3}) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg}$

Tale determinante può essere espresso tramite somme e differenze dei prodotti dei termini sulle 6 "diagonali continue" della matrice.

Ripetendo infatti a destra della matrice le sue prime due colonne

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$



i prodotti dei termini sulle 3 "diagonali" che partono dall'alto a sinistra (diagonali principali) sono rispettivamente *aei*, *bfg* e *cdh*, mentre i prodotti dei termini sulle 3 "diagonali" che partono dal basso a sinistra (diagonali secondarie) sono *gec*, *hfa* e *idb*. Il determinante della matrice è pari alla differenza tra la somma dei primi tre e quella degli ultimi tre.

Da questi primi esempi, ci accorgiamo che il determinante di una matrice $n \times n$ è la somma di $n\,!$ addendi di cui la metà, fatta eccezione per *n* = 1, con segno positivo e metà con segno negativo, e ciascuno dei quali è il prodotto di esattamente *n* elementi della matrice presi tutti in righe diverse e in colonne diverse.
Infatti, in una matrice 3×3 gli addendi sono 6 (3!); per una matrice 4×4 saranno 24 (4!).

Interpretazione geometrica

Considerando la matrice 2×2 del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, è possibile interpretare le due colonne (a,c) e (b,d) come le coordinate di due vettori $\in \Re^2$. Il determinante della matrice corrisponde all'**area** (con segno) del **parallelogramma** descritto dai vettori stessi. Analogamente dicasi per le righe (a,b) e (c,d).

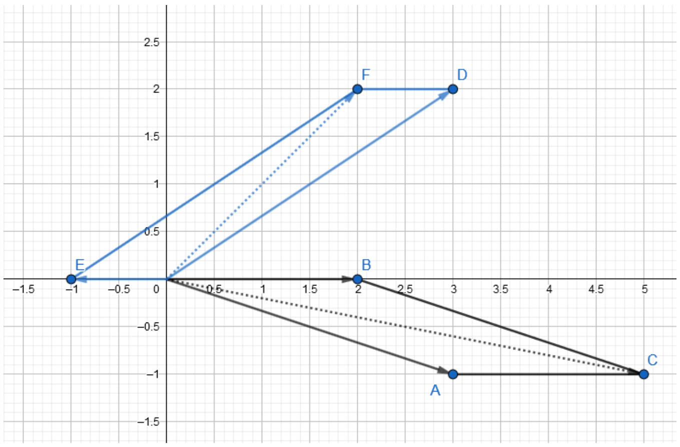
Esempio:

$\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$; consideriamo le coppie di vettori $v = (3,-1)$, $w = (2,0)$ e $u = (3,2)$, $t = (-1,0)$

disegniamo i parallelogrammi di spigoli

$(0,0)$, $A\,(3,-1)$, $B\,(2,0)$ e $C\,(3+2,-1+0)$

$(0,0)$, $D\,(3,2)$, $E\,(-1,0)$ e $F\,(3-1,2+0)$



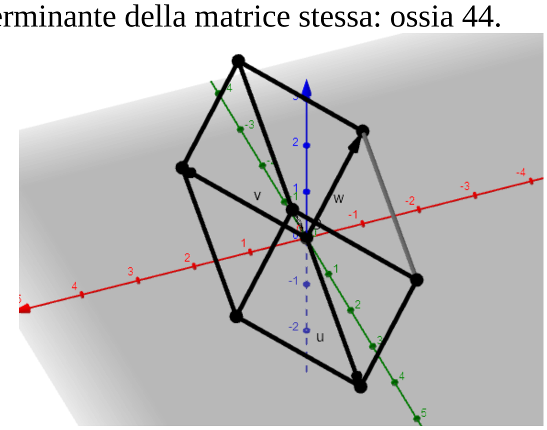
Il determinante della matrice formata dai quattro componenti (3,-1,2,0) $\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ corrisponde all'area di entrambi i parallelogrammi ACBO e DOEF.

Esempio 2:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -44$$

Consideriamo ora, nello spazio $\Re^3$, i tre vettori $v = (3,2,4)$ $w = (-1,0,2)$ e $u = (1,5,1)$

Essi, le cui coordinate sono state scelte prendendo le tre colonne della matrice (ma lo stesso procedimento vale anche considerando le tre righe), descrivono un parallelepipedo il cui volume (con segno) avrà valore pari al determinante della matrice stessa: ossia 44.



Sviluppo di Laplace

Lo sviluppo di Laplace consente di calcolare il determinante di matrici di dimensioni maggiori a 3×3 in termini dei determinanti di *n* matrici di dimensioni $(n-1)\times(n-1)$.

Lo sviluppo si esegue rispetto a una riga o a una colonna della matrice, a scelta.

Consideriamo una matrice generica $n\times n$:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Applicando la seguente formula rispetto a una riga *i*

$$\det(A_{n\times n}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{(ij)})$$

o, analogamente, la seguente formula rispetto alla colonna *j*

$$\det(A_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{(ij)})$$

$$\forall\, i=1\dots m\ ;\ \forall\, j=1\dots n\ ;$$

si otterranno *n* matrici di dimensione minore di cui più facilmente calcolare il determinante.

Nella formula:

- $A_{(ij)}$ è una sottomatrice di A_{ij} , ottenuta cancellando da A_{ij} l'*i*-esima riga e la *j*-esima colonna.

ad esempio, della matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la sottomatrice $A_{(13)}$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ottenuta cancellando da *A* la prima riga e la terza colonna.

- $(-1)^{i+j}$ è ~~detto cofattore (o~~ il segno della scacchiera~~)~~ e vale $\begin{cases} 1, & se\ (i+j)\ \text{è pari} \\ -1, & se\ (i+j)\ \text{è dispari} \end{cases}$

Vediamo subito un esempio: calcoliamo il determinante della matrice $A_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

N.B. Nella scelta della riga o colonna rispetto a cui eseguire lo sviluppo, conviene sempre prendere quella contenente più elementi nulli (in questo caso la terza riga, *i* = 3). Applichiamo Laplace:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{4}(-1)^{3+j}\cdot a_{3j}\cdot\det(A_{(3j)}) = (-1)^{3+1}\cdot a_{31}\cdot\det(A_{(31)}) + (-1)^{3+2}\cdot a_{32}\cdot\det(A_{(32)}) \cancel{+} + (-1)^{3+3}\cdot a_{33}\cdot\det(A_{(33)})$$
$$+(-1)^{3+4}\cdot a_{34}\cdot\det(A_{(34)})$$

Siccome gli elementi a_{32}, a_{33}, a_{34} sono nulli, della somma rimane solo $(-1)^{3+1}\cdot a_{31}\cdot\det(A_{(31)})$

$1\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ossia la sottomatrice senza terza riga e prima colonna) = $3\cdot(-7)=-21$

Proprietà del determinante

1. $\forall M_{n\times n}$, $\det({}^{t}A)=\det(A)$

2. $\forall n,\ \det(I_n)=1$

3. Alternanza : scambiare due righe oppure due colonne in una matrice cambia segno al det.

es. $\det\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=-44$ $\qquad\det\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}=+44$

4. Multilinearità : il determinante rispetta la somma e il prodotto in ciascuna riga e colonna.

Data $A=((v_1),\ldots(v_j)\ldots(v_n))$, dove $((v_1),\ldots(v_j)\ldots(v_n))$ sono le colonne di A,

- $\det((v_1),\ldots(v_{j'}+v_{j''})\ldots(v_n)) = \det((v_1),\ldots(v_{j'})\ldots(v_n))+\det((v_1),\ldots(v_{j''})\ldots(v_n))$

- det $((v_1),\ldots(c\cdot v_j)\ldots(v_n)) = c\cdot\det((v_1),\ldots(v_j)\ldots(v_n)) \qquad \forall c\in\Re$

N.B. $\det(c\cdot A)\neq c\cdot\det(A)$ ma $\det(c\cdot A)=c^n\cdot\det(A)$

5. **Teorema di Binet** : $\forall A,B\in M_{n\times n},\ \det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

6. Relazione con le matrici inverse : una matrice A^{-1} si dice inversa di A se

$A\cdot A^{-1}=I_n=A^{-1}\cdot A$

applicando il determinante ad entrambi i membri : $\det(A\cdot A^{-1})=\det(I_n)$

per il teorema di Binet : $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$

da ciò si deduce che $\det(A)\neq 0$ e anche che $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

Quindi una matrice A è invertibile **se** $\det(A)\neq 0$

Prima di passare a parlare delle matrici inverse, vediamo il det di matrici notevoli :

- matrici diagonali : $\det(A_{diag})=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$ ossia il det di matrici che hanno come elementi diversi da zero solo quelli sulla diagonale è pari al prodotto di tali elementi~~, gli elementi nulli non contano~~.

- matrici triangolari (sia superiori che inferiori) : $\det(A_{tr})=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$

Vale la stessa regola delle matrici diagonali. Dimostriamolo per induzione:

$P_n\rightarrow\det(A_{tr})=\prod_{k=1}^{n}a_{kk} \qquad P_1\rightarrow\det(A_{tr})=\prod_{k=1}^{1}a_{11}$ è vero (infatti $\det(a)=a$)

$P_{n+1}\rightarrow\det\begin{pmatrix}a_{11}\ldots a_{1n}\ldots\ldots a_{1,n+1}\\ 0\ldots\ldots a_{22}\ldots\ldots a_{2,n+1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0\ ..0\ldots0\ldots\ldots a_{n+1,n+1}\end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{n+1}a_{kk}$ Sviluppando Laplace rispetto alla riga $i=n+1$:

$\det(A_{tr})=(-1)^{n+1+n+1}\cdot a_{n+1,n+1}\cdot\det(A_{(n+1,n+1)})$ dove $A_{(n+1,n+1)}$ è la matrice $A_{n\times n}$

Quindi $\det(A_{tr})=+(a_{n+1,n+1})\cdot P_n \longrightarrow \prod_{k=1}^{n}a_{kk}\cdot(a_{n+1,n+1})=\prod_{k=1}^{n+1}a_{kk}$ c.v.d.

RICORDA: se una matrice A possiede una riga o una colonna di tutti zero, $\det(A)=0$
se una matrice A possiede due righe o due colonne uguali, $\det(A)=0$

MATRICE INVERSA

una matrice A^{-1} si dice inversa di A se $\underline{A\cdot A^{-1}=I_n=A^{-1}\cdot A}$

Abbiamo già visto che una matrice A è invertibile se $\det(A)\neq 0$ e se $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

non è difficile capire che una matrice è invertibile solo se è quadrata (altrimenti il det non è definito)

Prima di analizzare il caso generale, vediamo le matrici inverse delle matrici diagonali:
L'inversa di una matrice diagonale è un'altra matrice diagonale.
<u>Le matrici diagonali sono invertibili se e solo se tutti gli elementi diagonali sono diversi da zero</u>
Gli elementi diagonali della matrice inversa sono gli inversi degli elementi diagonali della matrice:

se $A=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$

Caso generale

La formula per calcolare l'inversa di una matrice A è la seguente:

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)_{ij}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det\left(A_{(ji)}\right)}$$

N.B. l'ultimo fattore è il determinante di $A_{(ji)}$ (e non di $A_{(ij)}$), ossia della <u>sottomatrice trasposta</u>.

Vediamo un esempio generico su una matrice 2×2

Data $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ calcoliamo A^{-1}

è bene scriversi subito la trasposta di A, per evitare errori di distrazione $\quad {}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Applichiamo la formula: $\left(A^{-1}\right)_{ij}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det\left(A_{(ji)}\right)$

Calcoliamo un elemento alla volta: $\left(A^{-1}\right)_{11}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot d \quad ; \qquad \left(A^{-1}\right)_{12}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot(-b)$

$\left(A^{-1}\right)_{21}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot(-c) \quad ; \quad \left(A^{-1}\right)_{22}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot a$

dunque $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Verifichiamo che $A\cdot A^{-1}=I_n \quad \dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proprietà della matrice inversa

1. $A, B \in M_{n\times n}$ invertibili $\Rightarrow$ $A\cdot B$ invertibile

$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

Dimostrazione

se $B^{-1}\cdot A^{-1}$ è uguale all'inversa di *AB*, allora varrà $(AB)\cdot\left(B^{-1}\cdot A^{-1}\right) = I_n$

E infatti, applicando la proprietà associativa: $A\cdot\left(B\cdot B^{-1}\right)\cdot A^{-1} = A\cdot I_n\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_n$;

$A\cdot A^{-1}$, per definizione della matrice inversa, dà proprio I_n.

2. $A \in M_{n\times n}$ invertibile, $c \neq 0 \in \Re$ $\Rightarrow cA$ invertibile

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}\cdot A^{-1}$$

Dimostrazione

Se è vero quanto affermato, varrà $(cA)\cdot\left(\frac{1}{c}\cdot A^{-1}\right) = I_n$

E infatti $\left(c\cdot\frac{1}{c}\right)\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right) = 1\cdot I_n$

3. $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

4. $A \in M_{n\times n}$ invertibile $\Rightarrow {}^tA$ invertibile

$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$

Dimostrazione

Dovrà essere vero che $\left({}^tA\right)\cdot{}^t\left(A^{-1}\right) = I_n$

Il prodotto di due trasposte *A* e *B* è uguale alla trasposta del prodotto tra *B* e *A*.

$$\left({}^tA\right)\cdot{}^t\left(A^{-1}\right) = {}^t\left(A^{-1}\cdot A\right) \longrightarrow {}^t\left(I_n\right) = I_n$$

(la trasposta di una matrice simmetrica è la matrice stessa)

Matrici ortogonali quadrate

$A_{n\times n}$ si dice ortogonale se $A\cdot{}^tA = I_n$, cioè se ${}^tA\cdot A = I_n$, cioè ~~e~~ se $\exists\, A^{-1} = {}^tA$

per n = 2 esistono solo due famiglie di matrici ortogonali:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha\in\Re$$

Verifica dell'ortogonalità delle matrici della prima famiglia:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Infatti, nello spazio $\Re^2$, i vettori di coordinate $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$ descrivono un quadrato di area 1.

per $n > 2$

Consideriamo la matrice ortogonale $A = \left((v_1),....(v_j)....(v_n)\right)$ e ${}^{t}A = \begin{pmatrix} (v_1) \\ ...... \\ (v_j) \\ ...... \\ (v_n) \end{pmatrix}$

$${}^{t}A \cdot A = \begin{pmatrix} (v_1 \cdot v_1),\ (v_1 \cdot v_2)..............(v_1 \cdot v_n) \\ .... \\ (v_n \cdot v_1), (v_n \cdot v_2)...............(v_n \cdot v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

cioè $\begin{cases} \|v_i\| = 1 \\ i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j \end{cases}$ infatti il prodotto tra due vettori con indici di riga e colonna diversi è 0.

<u>Verifica dell'unitarietà del determinante di matrici ortogonali</u>

Data A matrice ortogonale, $\det(A \cdot {}^{t}A) = \det(I_n)$

ma $\det(A \cdot {}^{t}A) = \det(A) \cdot \det\left({}^{t}A^{\cancel{-1}}\right)$ e $\det(I_n) = 1$

inoltre $\det(A) = \det({}^{t}A)$ per una proprietà delle matrici trasposte

quindi $\det^2(A) = 1 \longrightarrow \det(A) = \pm 1$

Proprietà della matrice ortogonale

1. $A, B \in M_{n \times n}$ ortogonali $\Rightarrow$ $A \cdot B$ ortogonale

<u>Dimostrazione</u>

$(AB) \cdot {}^{t}(AB) = I_n \longrightarrow (AB) \cdot \left({}^{t}B \cdot {}^{t}A\right) = I_n \longrightarrow A\left(B \cdot {}^{t}B\right){}^{t}A = I_n$

$\left(B \cdot {}^{t}B\right) = I_n$ perché per ipotesi B è ortogonale. $A(I_n)\,{}^{t}A \longrightarrow I_n = I_n$ c.v.d.

2. $A \in M_{n \times n}$ ortogonale $\Rightarrow$ ${}^{t}A$ ortogonale

<u>Dimostrazione</u>

Se A e ${}^{t}A$ sono ortogonali, deve essere vero che $\left({}^{t}A\right) \cdot {}^{t}\left({}^{t}A\right) = I_n$

ma ${}^{t}\left({}^{t}A\right) = A$ dunque $\left({}^{t}A\right) \cdot A = I_n$ che è vero per ipotesi (A è ortogonale)

3. La matrice identità I_n, oltre ad essere simmetrica e diagonale, è anche ortogonale

Perciò vale $I_n \cdot {}^{t}I_n = I_n$

Infatti ${}^{t}I_n = I_n$ perché matrice simmetrica.

MINORE DI UNA MATRICE $m \times n$

Data una matrice $A_{m \times n}$, si chiama minore di A una matrice di ordine $k \times k$ (e dunque quadrata) ottenuta cancellando da A $m-k$ righe e $n-k$ colonne.

Es. trova un minore di ordine $k = 2$ della matrice 3×4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

Per trovare un minore di A, dobbiamo cancellare $m-k$ righe e $n-k$ colonne; nel nostro esempio, $3-2$ righe e $4-2$ colonne, a nostra scelta.

Eliminiamo, ad esempio, la seconda riga e la prima e quarta colonne: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

Quanti minori di ordine k ha una matrice?
Tante quante sono le possibilità di cancellare $m-k$ righe e $n-k$ colonne.
Quindi, se $\binom{m}{k}$ sono i modi diversi con cui cancellare le righe, e $\binom{n}{k}$ i modi diversi con cui cancellare le colonne, il numero di minori possibili sarà dato da $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$

Nell'esempio di prima: $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 18$ minori diversi

RANGO DI UNA MATRICE $m \times n$

Data una matrice $A_{m \times n}$, si chiama rango di A $rk(A)$ il massimo ordine k per il quale un minore di A di ordine k abbia il determinante diverso da zero.
$rk(A)$ è un numero naturale ed esiste per $rk(A) \leq \min(m, n)$, ossia può assumere tutti i valori compresi tra 0 e il valore minimo tra m ed n.

Esempio. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, trovare il rango di A.

La matrice è 2×3, dunque $rk(A)$ può essere al massimo 2.

Cerchiamo i minori di A di ordine 2, che sono $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} = 3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamone il determinante: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 0$; $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -12$ $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = -24$

Per $k = 2$, esiste almeno un determinante di un minore di A di ordine 2 diverso da zero.
Quindi possiamo dire che $rk(A) = 2$ (è inutile calcolarlo per $k < 2$, perché cerchiamo l'ordine massimo).

Scartare dal calcolo l'opzione $rk(A) = 0$ è abbastanza immediato, perché ~~basta trovare un minore di ordine 0 con determinante diverso da 0. Quindi~~ l'unica matrice con $rk(A) = 0$ è la matrice zero.

TEOREMA DEGLI ORLATI
Per velocizzare il calcolo del rango di una matrice, si può seguire il seguente teorema:

> Sia $A_{m\times n}(\Re)$ una matrice. Allora $rk(A)=k$ se e solo se esiste un minore *A'* di ordine *k* di *A* non singolare (ossia con determinante non nullo), e tutti i minori di ordine $k+1$ di *A* ottenuti *orlando A'* hanno determinante nullo.

Una volta trovato un minore di *A* con $\det \neq 0$, nel calcolo dei determinanti dei minori di ordine maggiore ci si può limitare a quelli che contengono il minore stesso.

Ad esempio, consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ che ha un minore $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$.

$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \neq 0$ dunque *A* ha rango almeno pari a 2.

per *k* = 3, possiamo limitarci a calcolare il determinante dei minori

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, ottenuti *orlando* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ (cioè aggiungendo una riga e una colonna)

> **Relazione tra *rk* e det**
>
> $\det(A) \neq 0 \Rightarrow rk(A) = n$
>
> Infatti l'ordine massimo di un minore di *A* è *n* e l'unico minore di *A* di ordine *n* è *A* stessa.
>
> $\det(A) = 0 \Rightarrow rk(A) < n$
>
> $rk(A) = 0 \Rightarrow A = 0$

OPERAZIONI DI RIGA su una matrice
Con "operazioni di riga" si intende un insieme di operazioni applicabili alle righe di una matrice.
Esse sono di tre tipi:
1. scambio di due righe
2. moltiplicazione di una riga per uno scalare $c \neq 0 \in \Re$
3. somma ~~tra~~ una riga ~~e~~ di un multiplo di un'altra riga.

La loro caratteristica principale è che, data una matrice *A*, $rk(A)$ rimane invariato una volta applicate qualsiasi delle tre operazioni.

Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, se applichiamo la terza operazione e sottraiamo alla seconda riga il quadruplo della prima riga $\longrightarrow$ $(4\ 8\ 12) - 4\cdot(1\ 2\ 3) = (4\ 8\ 12) - (4\ 8\ 12) = (0\ 0\ 0)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno stesso $rk(A) = rk(B) = 1$

Questo perché le operazioni di riga non cambiano ~~significativamente il~~ la nullità del determinante della matrice;
in particolare se $\det(A)=0$ allora anche $\det(B)=0$ ~~, mentre se $\det(A)=c$ $\det(B)=c\cdot k \in \Re$~~
Nel dettaglio:
- la prima operazione cambia segno al determinante
- la seconda operazione prevede $\det(cA)=c^{\cancel{1}}\cdot\det(A)$
- la terza operazione si basa sulla multilinearità del determinante:

$$\det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ v_j + c\cdot v_k \\ \dots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ v_j \\ \dots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ c\cdot v_k \\ \dots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ v_j \\ \dots \end{pmatrix} + c\cdot\det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ v_k \\ \dots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_k \\ v_j \\ \dots \end{pmatrix} + c\cdot 0$$

con v_1, v_k, v_j vettori riga

Quindi <u>la terza operazione mantiene il determinante invariato.</u>
Perché si parla di "operazioni di riga" e non di "operazioni di colonna" ?

Se consideriamo i coefficienti di una matrice A come i coefficienti di un sistema lineare, interpreteremo le righe della matrice come le equazioni del sistema, mentre interpreteremo le colonne come le incognite dello stesso. Quindi le usuali operazioni tra equazioni (somma, prodotto...) si tradurranno in operazioni tra le <u>righe</u> di A. Se le applicassimo anche alle colonne, si genererebbero altre incognite~~, e ciò non porterebbe a nulla.~~
es.

il sistema lineare $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ x+y+z=-3 \end{cases}$ può essere "schematizzato" nella notazione $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,
dove il primo termine è la matrice dei coefficienti $A_{m\times n}$, il secondo è la colonna ($\cancel{m}$ n $\times 1$) delle incognite x e il terzo è la colonna dei termini noti b,
con m = numero equazioni del sistema , n = numero incognite
Il sistema può essere scritto dunque nella forma $Ax=b$.
Prima di affrontare la risoluzione di sistemi tramite le matrici, introduciamo un altro metodo algebrico con cui trattare le matrici.

ELIMINAZIONE DI GAUSS o RIDUZIONE A GRADINI

Il metodo dell'eliminazione di Gauss trasforma una matrice $A_{m\times n}$ in una matrice B costituita in parte da elementi caratteristici, detti *pivot* (in francese "perno"), l'ammontare dei quali stabilisce $rk(A)$.
La matrice B è spesso confusa con una matrice triangolare superiore, per il fatto da possedere tutti elementi nulli al di sotto della diagonale, ma differisce da quest'ultima perché non è sempre quadrata.
Il metodo è un algoritmo, ossia un procedimento iterativo, basato su mosse elementari:
1. Per prima cosa, si individui la prima colonna di A diversa da 0 (colonna con tutti zeri).
2. Se il primo termine di tale colonna è nullo, si scambi la prima riga di A con un'altra riga, in modo che il nuovo primo termine della colonna sia diverso da zero. Si consideri tale termine diverso da zero come il primo *pivot* p_1.
3. Si azzerino tutti gli elementi al di sotto di p_1 nel seguente modo: per ogni elemento da azzerare, si sottragga alla riga contenente tale elemento l'opportuno multiplo della prima riga che annulli l'elemento in questione.
4. Trascurando tutte le righe e colonne fino a p_1, ripetere i primi tre passi sulla matrice rimanente.

L'algoritmo termina quando non rimangono più sottomatrici su cui lavorare.

- Il numero *n* di *pivot* trovati corrisponde al rango della matrice.
- Se l'algoritmo viene applicato a una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\Re)$ con n pivot, allora si ha che $|p_1 \cdot \ldots \cdot p_n| = |\det A|$, ossia il modulo del prodotto dei *pivot* della matrice è uguale al modulo del determinante della matrice stessa.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La prima colonna diversa da zero è la seconda (0,2,1)

2. Poiché il suo primo elemento è 0, scambiamo la prima riga con la seconda (o, equivalentemente, con la terza) $A = \begin{pmatrix} 0 & \langle 2 \rangle & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; il primo *pivot* è $p_1 = 2$

3. Dobbiamo ora azzerare gli elementi al di sotto di 2. L'unico elemento diverso da zero nell'area interessata è $a_{32} = 1$

Sottraiamo alla terza riga (quella contenente 1) un multiplo della prima, tale che consenta l'annullamento dell'elemento. Poiché l'1 sta in seconda posizione nella riga, dobbiamo moltiplicare la prima riga per un numero che faccia diventare il suo secondo elemento pari a 1, in modo tale che $1-1=0$. Siccome il secondo elemento della prima riga è 2, un numero del genere è $\frac{1}{2}$

Procediamo : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sostituiamo il risultato nella matrice: $\begin{pmatrix} 0 & \langle 2 \rangle & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

4. Trascuriamo per il momento le righe e colonne che arrivano fino a $p_1 = 2$ e consideriamo la sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo il procedimento:

1. La prima colonna diversa da zero è la seconda $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix}$
2. Il suo primo elemento è già diverso da zero, e corrisponde al secondo *pivot* $p_2 = 1$
3. Sottraiamo alla seconda riga (che contiene $1/2 \neq 0$) un multiplo della prima, tale che $1/2$ si annulli

$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ La nuova matrice è $A' = \begin{pmatrix} 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A questo punto l'algoritmo termina, perché trascurando le righe e colonne fino a $p_2 = 1$, non rimane nulla.

I *pivot* di *A* sono due : $p_1 = 2$ $p_2 = 1$ Dunque $rk(A) = 2$

Sulla matrice a gradini così ottenuta $A = \begin{pmatrix} 0 & \langle 2 \rangle & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è possibile applicare un ulteriore algoritmo in modo da avere tutti i *pivot* pari a 1 e tutti gli altri elementi contenuti nelle colonne dei *pivot* pari a zero:

1. Si divida ogni riga diversa da zero per il proprio *pivot*

2. Si faccia in modo di azzerare tutti gli elementi diversi da zero contenuti nelle colonne dei *pivot* applicando il metodo precedentemente visto. procedendo dal basso verso l'alto

Riduciamo $A = \begin{pmatrix} 0 & \langle 2 \rangle & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dividiamo le prime due righe per i rispettivi *pivot* (2 ed 1):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \langle 1 \rangle & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sulle colonne contenenti *pivot* azzeriamo gli elementi diversi da zero:

Nel nostro caso l'unico elemento coinvolto è $a_{14} = 1/2$

Sottraiamo alla prima riga un multiplo della seconda, in modo che $1/2$ si annulli:

$$(0 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 1/2) - \frac{1}{2}(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) = (0 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 1/2) - (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1/2) = (0 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 0)$$

La matrice così ottenuta è $A = \begin{pmatrix} 0 & \langle 1 \rangle & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ripercorriamo i passi dell'eliminazione di Gauss ~~in termini più formali:~~ per un sistema quadrato con det≠0.

Il *metodo di eliminazione di Gauss* è una procedura che trasforma, tramite operazioni elementari, un sistema lineare quadrato in un sistema triangolare superiore equivalente, dove per "equivalente" si intende un sistema con esattamente le stesse soluzioni. Risolvendo quest'ultimo con una risoluzione all'indietro (ossia partendo dall'equazione scritta più in basso), otteniamo la soluzione del sistema di partenza. Il metodo consiste in diversi passi (per l'esattezza uno meno dell'ordine del sistema). Il passo *i*-esimo annulla gli elementi sotto la diagonale principale della colonna *i*-esima della matrice dei coefficienti, producendo nel contempo un numero reale p_i, l'*i*-esimo *pivot* del sistema relativo alla data eliminazione di Gauss - e tutto senza cambiare le soluzioni del sistema.

Consideriamo la prima colonna di una matrice *A*. Se contiene solo zeri, passiamo alla seconda colonna. Se invece contiene qualche elemento non nullo, scambiamo se necessario la prima equazione (ossia la prima riga) con una delle successive in modo che a essere diverso da zero sia a_{11}. Poniamo $p_1 = a_{11}$, e sommiamo all'equazione *j*-esima (per *j* = 2,....,*n*) la prima equazione moltiplicata per $-a_{j1}/p_1$. Otteniamo così un sistema equivalente in cui gli elementi sotto la diagonale principale della prima colonna della matrice dei coefficienti sono tutti nulli.

I passi successivi sono molto simili. Se abbiamo già trattato le prime $i-1$ colonne, consideriamo la colonna *i*-esima. Se A^i contiene solo zeri passiamo alla colonna successiva. Altrimenti, a meno di scambiare l'*i*-esima riga con una sottostante, possiamo supporre che $a_{ii} \neq 0$, e lo poniamo come primo *pivot*. Ponendo infine $a_{nn} = p_n$ abbiamo ottenuto un sistema triangolare superiore.

Calcolo di una matrice inversa tramite l'eliminazione di Gauss
L'algoritmo di Gauss consente anche di trovare l'inversa di una matrice *A*, il che torna particolarmente utile nel caso di matrici di grandi dimensioni, ma poco pratico nel caso di matrici piccole.

Vediamo come procedere osservando subito un esempio.

Data $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, voglio trovare A^{-1}

- per iniziare, si scrive la matrice identità I_n (con *n* pari all'*n* di *A*) accanto alla matrice data:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto si inizia ad eseguire l'algoritmo di Gauss: alla fine del procedimento, troveremo scritta a sinistra la matrice identità, e a destra la matrice inversa di *A*.
1. la prima colonna diversa da zero è la prima $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. Il suo primo elemento è zero, dunque la scambiamo con la seconda riga
$\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: il primo *pivot* è $p_1 = 1$
3. per fare sì che $a_{31} = 2$ si annulli, sottraiamo alla terza riga il doppio della prima:
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Otteniamo così $\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Trascuriamo la prima riga e la prima colonna e lavoriamo sulla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

La prima colonna è diversa da zero e lo è anche il suo primo elemento: $p_2 = 2$

Alla seconda riga della sottomatrice (e quindi alla terza riga di *A*) sommo il triplo della prima.

$\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \langle 2 \rangle & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; a questo punto troviamo subito $p_3 = 5$ (se stessimo cercando il rango di *A*, avremmo terminato: $rk(A) = 3$).

Procediamo ora all'ulteriore riduzione di A descritta prima.

- dividiamo ogni riga per il suo *pivot*:

$$\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \langle 1 \rangle & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & 3/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

- azzeriamo gli elementi che si trovano sopra ai *pivot*. Qui sono due: $a_{12} = 4$ e $a_{23} = 1/2$

Occupiamoci prima di $a_{23} = 1/2$: sottraiamo alla seconda riga la metà della terza riga:

$$\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \langle 1 \rangle & 0 & 1/5 & 1/5 & -1/10 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & 3/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Ora annulliamo $a_{12} = 4$: sottraiamo alla prima riga il quadruplo della seconda:

$$\begin{pmatrix} \langle 1 \rangle & 0 & 0 & -4/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & \langle 1 \rangle & 0 & 1/5 & 1/5 & -1/10 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & 3/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

A questo punto abbiamo finito: la matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & -1/10 \\ 3/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

APPLICAZIONI LINEARI

Si definisce applicazione la relazione tra due insiemi, ad esempio due spazi vettoriali, definiti **dominio** e **codominio**, tale che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno e un solo elemento del secondo insieme. Se $f(v)=w$ ("*f* di *v* uguale *w*"), *v* è l'elemento del dominio su cui opera l'applicazione, mentre *w* è definito **immagine di *v*** ed è l'elemento del codominio associato a *v*. Ad ogni elemento del dominio corrisponde solo un elemento del codominio, ma è possibile che ~~ad~~ un elemento del codominio corrispondano ~~ne~~ a più di un elemento del dominio. La definizione di applicazione è, in questo senso, asimmetrica.

Immaginiamo di avere due spazi vettoriali $\Re^n$ e $\Re^m$ e supponiamo di avere un'applicazione o funzione: $f:\Re^n \to \Re^m$

Un'applicazione tra spazi vettoriali si dice **lineare** se soddisfa tre condizioni:

1. lo zero nello zero: $f:\underline{0}\in\Re^n \to \underline{0}\in\Re^m$, ossia *f* manda lo zero di $\Re^n$ nello zero di $\Re^m$

$$\boxed{f(\underline{0})=\underline{0}}$$ (segue dalle due proprietà successive)

$\underline{0}$ è il vettore nullo in qualsiasi spazio vettoriale.

2. somma nella somma: dati due vettori v_1 e v_2 $\in \Re^n$

$$\boxed{f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)}$$ **additività**

3. prodotto per scalare nel prodotto per scalare: dato $v \in \Re^n$ e $c \in \Re$

$$\boxed{f(c\cdot v)=c\cdot f(v)}$$ **omogeneità**

La condizione di linearità è molto restrittiva: infatti, ~~conoscendo~~ l'immagine di pochi elementi del dominio ~~e del codominio per conoscere esattamente~~ determina il comportamento dell'intera applicazione.

Ad esempio, supponiamo di avere un'applicazione $f:\Re^2 \to \Re^3$

basta fissare $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ per determinare tutta la funzione.

Se sappiamo che $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ e che $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ posso sapere ~~la direzione e il modulo~~ l'immagine di qualsiasi altro vettore ~~del campo~~ di $\Re^2$, grazie alle condizioni di linearità.

Ad esempio $f\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$ è esprimibile come $u\cdot f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (per la linearità del prodotto per scalare) e dunque

$$f\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}=u\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cdot a\\u\cdot b\\u\cdot c\end{pmatrix};$$ allo stesso modo, $$f\begin{pmatrix}0\\u'\end{pmatrix}=u'\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'\cdot a'\\u'\cdot b'\\u'\cdot c'\end{pmatrix}$$

O ancora $f\begin{pmatrix}u\\u'\end{pmatrix}$ è esprimibile come $$f\left(\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\u'\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0\\u'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ua\\ub\\uc\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u'a'\\u'b'\\u'c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ua+u'a'\\ub+u'b'\\uc+u'c'\end{pmatrix}$$

COMBINAZIONI LINEARI

La *combinazione lineare* di *k* vettori $v_1,......,v_k \in \Re^n$ con coefficienti $c_1,......,c_k \in \Re$

è il vettore $c_1 \cdot v_1 + ... + c_k \cdot v_k \in \Re^n$, ossia $\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot v_j$

Lo *span* dei (o *sottospazio generato* dai) vettori $v_1,......,v_k$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di $v_1,......,v_k$

Data un'applicazione $f : \Re^n \to \Re^m$, si ha che f è lineare se e solo se rispetta le combinazioni lineari.

$$\forall k \in \aleph, \forall v_1...v_k \in \Re^n, \forall c_1...c_k \in \Re \quad : \quad f\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot f(v_j)$$

ossia $f(c_1 \cdot v_1 + ... + c_k \cdot v_k) = c_1 \cdot f(v_1) + ... + c_k \cdot f(v_k)$

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE

Sia $f : \Re^n \to \Re^m$ un'applicazione lineare.

(vedi pag. 65)

Per ogni vettore v_i di una base dello spazio vettoriale $\Re^n$ $\{v_1,....v_n\}$ determiniamo la corrispondente immagine tramite l'applicazione *f*. Determiniamo cioè $f(v_1),...., f(v_n)$.

I nuovi vettori così ottenuti saranno elementi dello spazio vettoriale $\Re^m$ e potranno essere scritti come combinazione lineare degli elementi $w_1,...w_m \in \Re^m$ che formano una base dello spazio $\Re^m$.

Quindi:

$$f(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + ... + a_{m1} \cdot w_m$$
$$...$$
$$f(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + ... + a_{mn} \cdot w_m$$

La matrice $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} .... a_{1n} \\ .... \\ a_{m1} & a_{m2} .... a_{mn} \end{pmatrix}$ si dice matrice associata all'applicazione lineare *f*.

In altri termini, la matrice associata a un'applicazione lineare $f : \Re^n \to \Re^m$ è la matrice $m \times n$ che ha per *j*-esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine $f(v_j)$

Nell'esempio visto prima dell'applicazione $f : \Re^2 \to \Re^3$ la matrice associata risulta essere

$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$ in cui le colonne sono le immagini dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ La matrice della generica immagine $f\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ (sempre in riferimento all'esempio di prima), sarà data dal prodotto righe per colonne delle matrici $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$. ~~(che in effetti rispettano la conformabilità del prodotto tra matrici)~~

La relazione tra applicazioni lineari e matrici vale anche al contrario. Data una matrice $A_{m\times n}$ resta naturalmente associata l'applicazione lineare $f:\Re^n \to \Re^m$ definita, per ogni vettore $v\in\Re^n$, da $\boxed{f(v)=A\cdot v}$

In generale, dunque, data l'applicazione *f* la matrice associata *A* viene costruita colonna per colonna considerando il valore di $f(e_1), f(e_2),\dots f(e_j),\dots. f(e_n)$, dove $e_1,e_2,\dots e_j,\dots. e_n$ sono gli elementi di $\Re^n$ composti da tutti zero, fatta eccezione per il posto *j*, che invece presenta un 1.
In altri termini, e_j è la *j*-esima colonna della matrice identità I_n.

Esempi notevoli di applicazioni lineari

1. Dati $\Re^n$ e $\Re^m$, l'*applicazione nulla* $0:\Re^n \to \Re^m$ è definita da $0(v)=\underline{0}$ per tutti i *v* di $\Re^n$.
La matrice associata è data da tutte le immagini degli elementi $e_1,e_2,\dots e_j,\dots. e_n$, che valgono tutte zero. Dunque la matrice associata è $A=0$

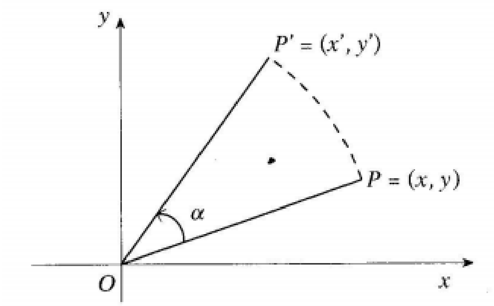
2. L'*applicazione identità* di uno spazio vettoriale $\Re^n$ è per definizione l'applicazione $\mathrm{id}:\Re^n \to \Re^n$ data da $\mathrm{id}(v)=v \quad \forall v\in\Re^n$. Cioè è l'applicazione che manda ogni vettore in se steso. La matrice associata delle immagini $f(e_1),\dots f(e_j),\dots. f(e_n)$ è la matrice identità I_n.

3. *Proiezioni canoniche*: sono tutte le applicazioni lineari $f:\Re^n \to \Re^m$ con $\underline{m\le n}$.
Per ogni vettore $v\in\Re^n\ (a_1.....a_n)$ varrà la relazione $f(a_1....a_n)=(a_1....a_m)$, dove l'immagine di qualsiasi vettore sarà troncata di $n-m$ elementi. Ad esempio un'applicazione $f:\Re^3\to\Re^2$ avrà come immagini $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ i vettori $(1,0),(0,1),(0,0)$ e la matrice associata all'applicazione sarà $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, ossia la matrice I_n affiancata dalla matrice zero.

Quindi, la matrice associata sarà data dalla matrice zero per tutte le immagini degli elementi e_j tali che $j>m$, è dalla matrice identità per il caso contrario.

4. ~~*Inversioni*~~ Immersioni *canoniche*: sono tutte le applicazioni lineari $f:\Re^n \to \Re^m$ con $\underline{m>n}$.
Per ogni vettore $v\in\Re^n\ (a_1.....a_n)$ varrà la relazione $f(a_1....a_n)=(a_1....a_n, 0....0)$
ossia ogni vettore verrà mandato in se stesso visto nello spazio superiore; ad ogni vettore verranno aggiunte $m-n$ coordinate costituite da zeri. La matrice associata sarà dunque la matrice formata dalla matrice identità I_n e dalla matrice zero al di sotto, quest'ultima costituita da $m-n$ righe.

5. *Rotazioni in* $\Re^2$ *di angolo* α : si fa riferimento alla ~~tras~~rotazione di un vettore nello spazio $\Re^2$ rispetto ad un angolo α del tipo:



Questa è un'applicazione lineare $f: \Re^2 \to \Re^2$ e per ricavare le immagini degli elementi e_1 e e_2 dobbiamo considerare le coordinate dei vettori $\in \Re^2$ ruotati di un angolo α.
Troviamo le coordinate generiche dei vettori P e P' dell'immagine:
Se chiamiamo β l'angolo sotteso a P, le coordinate polari di P' saranno:

$P' = \begin{cases} x' = \cos(\alpha+\beta) \\ y' = \sin(\alpha+\beta) \end{cases}$ che equivalgono a $P' = \begin{cases} x' = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ y' = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{cases}$

Ma $\cos\beta$ e $\sin\beta$ sono le coordinate x e y di P.

Quindi riscriviamo le coordinate di P' come $P' = \begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{cases}$

Ricavando la matrice associata all'applicazione, e considerando dunque solamente i coefficienti del vettore P', otteniamo $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, che poi è una delle due matrici ortogonali in $\Re^2$

In effetti, applicando la formula $f(v) = A\cdot v$ a un generico vettore $v \in \Re^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

otteniamo $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$, ossia le coordinate di P'.

6. *Riflessioni in* $\Re^2$ ~~*di angolo* α~~ : sono le applicazioni lineari $f: \Re^2 \to \Re^2$ che ad un vettore $v \in \Re^2$ associa il valore ottenuto da v dopo la riflessione rispetto alla retta ~~che passa per 0 e~~ di angolo $\frac{\alpha}{2}$

Il vettore avrà coordinate $\begin{pmatrix} \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \\ \sin\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \end{pmatrix}$ e la sua immagine avrà forma

$$f\begin{pmatrix} \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \\ \sin\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \\ \sin\left(\cancel{\frac{\alpha}{2}}\,\beta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\overset{\alpha-\beta}{\cancel{\frac{\alpha}{2}}}\right) \\ \sin\left(\underset{\alpha-\beta}{\cancel{\frac{\alpha}{2}}}\right) \end{pmatrix}$$

Operazioni tra Applicazioni lineari

Vediamo ora le operazioni tra applicazioni lineari, che hanno la caratteristica di generare altre applicazioni lineari.

SOMMA : date due applicazioni $f, g : \Re^n \to \Re^m$ si definisce la loro somma come:
$f + g : \Re^n \to \Re^m = f(v) + g(v)$
ossia $\forall v \in \Re^n$ si pone $\underline{(f+g)(v) = f(v) + g(v)}$
Dimostriamo che se *f* e *g* sono lineari lo è anche la loro somma:
Ossia verifichiamo che è vero che l'applicazione somma rispetta la somma e il prodotto tra vettori:

I. $(f+g)(v+w) = (f+g)(v) + (f+g)(w) \qquad \forall v, w \in \Re^n$
Riscriviamo il primo membro secondo la definizione di somma tra applicazioni:
$(f+g)(v+w) = f(v+w) + g(v+w)$. Questa, per la linearità della somma è uguale a
$f(v) + f(w) + g(v) + g(w) = f(v) + g(w) + f(w) + g(v)$
Il secondo membro, riscritto secondo la definizione di somma tra applicazioni è uguale a
$(f+g)(v) + (f+g)(w)$, che è ciò che volevamo dimostrare. c.v.d.

II. $(f+g)(c \cdot v) = c \cdot (f+g)(v) \qquad \forall v \in \Re^n \quad \forall c \in \Re$
Riscriviamo il primo membro secondo la definizione di somma tra applicazioni:
$(f+g)(c \cdot v) = f(c \cdot v) + g(c \cdot v)$. Applichiamo la linearità del prodotto a *f* e a *g*:
$c \cdot f(v) + c \cdot g(v) = c(f(v) + g(v))$
L'espressione tra parentesi è la definizione di somma tra applicazioni:
$c(f(v) + g(v)) = c \cdot ((f+g)(v))$ c.v.d.

PRODOTTO : data l'applicazione $f : \Re^n \to \Re^m$ e lo scalare $c \in \Re$ si definisce il loro prodotto come:
$\underline{(c \cdot f)(v) = c \cdot f(v)} \qquad \forall v \in \Re^n$
Dimostriamo la linearità di $c \cdot f$ rispetto alla somma e rispetto al prodotto.

I. $(c \cdot f)(v+w) = (c \cdot f)(v) + (c \cdot f)(w) \qquad \forall v, w \in \Re^n \quad \forall c \in \Re$
Riscriviamo il primo membro come $(c \cdot f)(v+w) = c \cdot f(v+w)$ per la definizione appena vista
Applichiamo la linearità della somma: $c \cdot f(v+w) = c \cdot (f(v) + f(w))$
Per la proprietà distributiva l'espressione è uguale a $c \cdot f(v) + c \cdot f(w)$ che,
per la definizione di prodotto tra applicazioni è $(c \cdot f)(v) + (c \cdot f)(w)$ c.v.d.

II. $(c \cdot f)(d \cdot v) = d \cdot (c \cdot f)(v) \qquad \forall v \in \Re^n \quad \forall c, d \in \Re$
Riscriviamo il primo membro come $(c \cdot f)(d \cdot v) = c \cdot f(d \cdot v)$
Applichiamo la linearità del prodotto: $c \cdot f(d \cdot v) = c \cdot (d \cdot f(v))$
Commutiamo *c* e *d* : $d \cdot c \cdot (f(v))$
Per la definizione di prodotto tra applicazioni: $d \cdot c \cdot (f(v)) = d \cdot (c \cdot f)(v)$ c.v.d.

COMPOSIZIONE di applicazioni lineari

Date le applicazioni concatenate $\Re^p \xrightarrow{g} \Re^n \xrightarrow{f} \Re^m$, in cui il codominio di *g* corrisponde al dominio di *f*, si definisce composizione di *f* e *g* la relazione
$\underline{(f \circ g)(v) = f(g(v))}$ $\quad \forall v \in \Re^p$, dove $f \circ g$ si legge "*f* composto *g*".

Dimostriamo che, se *f* e *g* sono lineari, lo è anche la loro composizione.
Vediamo, come negli esempi precedenti, prima rispetto alla somma e poi rispetto al prodotto.

I. $(f \circ g)(v+w) = (f \circ g)(v) + (f \circ g)(w) \qquad \forall v, w \in \Re^p$

Riscriviamo il primo membro secondo la definizione di composizione:
$(f \circ g)(v+w) = f(g(v+w))$
Applichiamo la linearità della somma a *g* : $f(g(v)+g(w))$
Applichiamo la linearità della somma a *f* : $f(g(v)) + f(g(w))$
Riscriviamo l'espressione secondo la definizione di composizione:
$f(g(v)) + f(g(w)) \quad = \quad (f \circ g)(v) + (f \circ g)(w)$ c.v.d.

II. $(f \circ g)(c \cdot v) = c \cdot (f \circ g)(v) \qquad \forall v \in \Re^p \quad \forall c \in \Re$

Riscriviamo il primo membro come $f(g(c \cdot v))$
Applichiamo la linearità del prodotto: $f(g(c \cdot v)) = c \cdot f(g(v))$
Riscriviamo l'espressione secondo la definizione di composizione
$c \cdot f(g(v)) = c \cdot (f \circ g)(v)$ c.v.d.

Relazione tra le operazioni delle applicazioni lineari e le loro matrici associate

Data una matrice *A*, indichiamo con f_A l'applicazione lineare ad essa associata.
Quindi possiamo riscrivere la relazione tra applicazioni e matrici come:

$$f_A(v) = A \cdot v$$

Dimostriamo che, $\forall A, B \in M_{m \times n}$ $\boxed{f_{A+B} = f_A + f_B}$:
l'applicazione della somma tra matrici è uguale alla somma delle applicazioni.
Consideriamo l'uguaglianza $\forall v \in \Re^n$: $f_{A+B}(v) = f_A(v) + f_B(v)$
Riscriviamo il primo membro come $f_{A+B}(v) = (A+B) \cdot v$
Applichiamo la proprietà distributiva $(A+B) \cdot v = A \cdot v + B \cdot v$
$A \cdot v$ e $B \cdot v$ sono le applicazioni associate rispettivamente ad *A* e a *B*.
Quindi vale $A \cdot v + B \cdot v = (f_A + f_B)(v)$ c.v.d.

Dimostriamo ora che $\forall A \in M_{m \times n} \quad \forall c \in \Re$ $\boxed{f_{c \cdot A} = c \cdot f_A}$
Come prima, consideriamo l'uguaglianza $\forall v \in \Re^n$: $f_{c \cdot A}(v) = c \cdot f_A(v)$
Il primo membro è uguale a $f_{c \cdot A}(v) = (c \cdot A) \cdot v$ che, per proprietà associativa, è uguale a $c \cdot (A \cdot v)$.
$(A \cdot v)$ è l'applicazione associata alla matrice *A* ed è uguale a $(A \cdot v) = f_A(v)$
Dunque $c \cdot (A \cdot v) = c \cdot f_A(v)$ c.v.d.

Dimostriamo ora che le applicazioni lineari rispettano il prodotto righe per colonne tra matrici.

In particolare dimostriamo che $\boxed{f_{(A \cdot B)} = f_A \circ f_B}$

Date due matrici $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ il loro prodotto sarà una matrice di dimensione $m \times p$

e l'applicazione associata sarà $f_{A \cdot B} : \Re^p \to \Re^m$, con dominio in $\Re^p$.

Abbiamo già visto che la composizione $f_A \circ f_B$ ha dominio in $\Re^p$ ($\Re^p \xrightarrow{g} \Re^n \xrightarrow{f} \Re^m$).

Quindi i domini dei due membri coincidono. Vediamo ora se hanno lo stesso effetto su un qualsiasi vettore $v \in \Re^p$.

$$f_{(A \cdot B)}(v) = (f_A \circ f_B)(v)$$

Scriviamo il primo membro come $(A \cdot B) \cdot v$ che, per proprietà associativa, è uguale a

$A \cdot (B \cdot v)$ con $(B \cdot v) \in \Re^n$; $A \cdot (B \cdot v)$ è un altro modo per scrivere $f_A(B \cdot v)$

e $B \cdot v$ è un altro modo per scrivere $f_B(v)$; quindi $A \cdot (B \cdot v) = f_A(f_B(v))$

che è la definizione di composizione : $f_A(f_B(v)) = (f_A \circ f_B)(v)$ c.v.d.

Per questo motivo il prodotto righe per colonne è definito come prodotto tra due matrici *A* e *B* tali che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda.

Perché è l'unico modo affinché il prodotto tra applicazioni funzioni; e dunque affinché valga la proprietà associativa. Le matrici sono semplicemente delle tabelle di valori su cui eseguire delle operazioni necessarie allo studio di altri oggetti matematici. Le matrici nascono per servire da "appoggio" ad altri studi. Per questo è normale che seguano delle regole particolari, che permettono di far funzionare ogni sistema ad esse associato.

Se l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali era scritto come $M_{m \times n}(\Re)$,

l'insieme delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali segue questa notazione:

$$\mathrm{Lin}(\Re^n, \Re^m)$$

Fin ora abbiamo descritto una relazione particolare tra questi due insiemi, che fa corrispondere alla

matrice *A* l'applicazione lineare f_A, alla somma di matrici la somma di applicazioni lineari, al prodotto per scalare di matrici quello di applicazioni lineari, e al prodotto righe per colonne tra matrici la composizioni di applicazioni lineari.

Tale relazione è detta **isomorfismo**.

Altre corrispondenze tra i due insiemi riguardano l'elemento neutro e l'elemento inverso.

~~Se $M_{m \times n}(\Re)$ I_n ,~~ $f_{\cancel{M}} = \cancel{I}$ id

I_n

$f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$ N.B. : l'inversa di un'applicazione $f : \Re^n \to \Re^m$ esiste solo se $n = m$

Nucleo e Immagine

Sia $f : \Re^n \to \Re^m$ un'applicazione lineare.
Definiamo due sottoinsiemi del dominio e del codominio di *f*.
- **nucleo** di $\Re^n$
- **immagine** di $\Re^m$

Il nucleo di un'applicazione $\operatorname{Ker} f$ corrisponde all'insieme:

$$\operatorname{Ker} f := \{ v \in \Re^n \ / \ f(v) = \underline{0} \in \Re^m \}$$

Ossia l'insieme dei vettori *v* che ~~mandano~~ manda l'applicazione nel vettore 0.

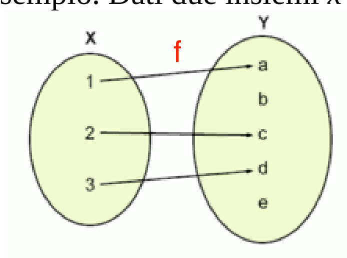
L'immagine di un'applicazione $\operatorname{Im} f$ corrisponde all'insieme:

$$\operatorname{Im} f := \{ w \in \Re^m \ / \ \exists v \in \Re^n \ per \ \ cui \ \ f(v) = w \}$$

Ossia l'insieme delle immagini degli elementi di $\Re^n$ mediante *f*.

Il nucleo e l'immagine sono definiti asimmetricamente: il nucleo è definito solo per le applicazioni lineari, mentre l'immagine esiste anche delle applicazioni non lineari.

Esempio. Dati due insiemi *x* e *y* definiti così:



non esiste nessun elemento di *x* per cui vale $\overset{f}{\cancel{y}}(x) = b$ o $\overset{f}{\cancel{y}}(x) = e$
Quindi l'insieme immagine di $\overset{f}{\cancel{y}}$ sarà $\operatorname{Im} \overset{f}{\cancel{y}} := \{a, c, d\}$
In questo caso $\operatorname{Im} \overset{f}{\cancel{y}}$ è un sottoinsieme proprio di $\overset{Y}{\cancel{y}}$: $\operatorname{Im} \overset{f}{\cancel{y}} \subseteq \overset{Y}{\cancel{y}}$

Esempi di nuclei e immagini di applicazioni notevoli

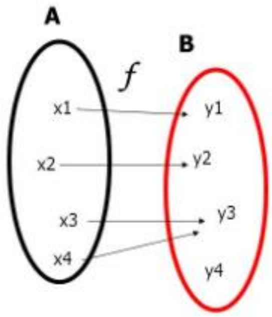
1. L'applicazione nulla $0 : \Re^n \to \Re^m$ ha nucleo $\operatorname{Ker} f := \Re^n$, perché tutti gli elementi di *f* vanno in $\underline{0}$ per definizione; ed ha immagine $\operatorname{Im} f := \{0\}$, perché 0 è l'unico elemento dell'applicazione.

2. L'applicazione identità $\mathrm{id} : \Re^n \to \Re^n$ ha nucleo $\operatorname{Ker} f := \{0\}$, perché 0 è l'unico elemento del dominio che viene mandato in $\underline{0}$ (tutti gli altri vengono mandati in se stessi); ed ha immagine $\operatorname{Im} f := \Re^{\overset{n}{\cancel{m}}}$, perché ogni elemento è immagine di se stesso.

3. Le proiezioni canoniche $f : \Re^n \to \Re^m$ con $m \le n$ hanno nucleo $\operatorname{Ker} f$:= {tutti gli e_j tali che $j > m$}, perché gli elementi con questa caratteristica vengono mandati tutti in $\underline{0}$; ed ha immagine $\operatorname{Im} f := \Re^m$ ~~, perché ogni vettore del codominio è immagine di se stesso visto in uno spazio vettoriale superiore.~~

4. Le ~~inversioni~~ immersioni canoniche $f : \Re^n \to \Re^m$ con $m > n$ hanno nucleo $\operatorname{Ker} f := \{0\}$, perché l'unico elemento mandato in $\underline{0}$ è il vettore zero, ~~mentre tutti gli altri vanno in se stessi visti in uno spazio superiore;~~ ed hanno immagine $\operatorname{Im} f := \Re^m$

Iniettività, suriettività e biiettività di un'applicazione



1. Un'applicazione $f: A \to B$ si dice *iniettiva* (o ingettiva) se $\forall\, a, a' \in A \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

o, equivalentemente, $\forall\, a, a' \in A$ $\boxed{f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'}$

Ossia iniettive sono le applicazioni per cui ~~ad~~ ogni elemento del codominio è associato ~~un solo~~ ad al più un elemento del dominio. La funzione dell'esempio **non** è iniettiva, perché all'elemento del codominio y_3 corrispondono due elementi del dominio (x_3, x_4).

2. Un'applicazione $f: A \to B$ si dice *suriettiva* (o surgettiva) se $\forall\, b \in B$, $\exists\, a \in A \,/\, f(a) = b$

ossia $\boxed{\operatorname{Im} f = B}$

La funzione dell'esempio **non** è suriettiva perché per $b = y_4$ non esiste un *a* tale che $f(a) = y_4$

Infatti $\operatorname{Im} f = \{y_1, y_2, y_3\}$ mentre $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ $\operatorname{Im} f \neq B$

3. Un'applicazione $f: A \to B$ si dice *biiettiva* (o bigettiva) se è sia iniettiva che suriettiva.
Risulta importante definire a parte questo tipo di applicazione, perché la biiettività è la condizione di invertibilità di una funzione. Cioè esiste l'inversa f^{-1} di un'applicazione $f: A \to B$ se f è biiettiva.

Riepiloghiamo le definizioni:
- Iniettività: $\forall\, b \in B$ si ha $f(a) = b$ per <u>al più</u> un $a \in A$
- Suriettività: $\forall\, b \in B$ si ha $f(a) = b$ per <u>al meno</u> un $a \in A$
- Biiettività: $\forall\, b \in B$ si ha $f(a) = b$ per <u>esattamente</u> un $a \in A$

Per questo una funzione biiettiva è invertibile. Ad ogni elemento del codominio arriva un solo elemento del dominio, e "tornare indietro" è possibile, perché si conosce la provenienza di qualsiasi immagine.

RELAZIONE con Nucleo e Immagine

Sia $f : \Re^n \to \Re^m$ un'applicazione lineare.

- f è suriettiva se e solo se l'immagine di f corrisponde al suo codominio $\operatorname{Im} f = \Re^m$

- f è iniettiva se e solo se il nucleo di f contiene solo l'elemento 0

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

Dimostriamo la seconda asserzione (la prima è vera per definizione di suriettività) in entrambi i versi dell'implicazione.

I. $f \text{ iniettiva} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

Sicuramente l'elemento 0 appartiene al nucleo di *f*, perché la condizione di linearità lo impone. Ciò che dobbiamo dimostrare è che tutto il nucleo di *f* è incluso nell'insieme con 0 $\operatorname{Ker} f \subseteq \{0\}$

Sappiamo che $\forall\, v \in \operatorname{Ker} f$, $f(v) = 0$; sappiamo anche che $f(0) = 0$
Dunque *v* e 0 hanno stessa immagine (ossia 0). Ma per l'ipotesi di iniettività di *f* l'unica possibilità per cui due elementi del dominio abbiano stessa immagine è che i due elementi siano uguali.
Dunque $v = 0$ $\forall\, v \in \operatorname{Ker} f$
Allora è vero che $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ c.v.d.

II. $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f \text{ iniettiva}$

Dobbiamo dimostrare che $\forall\, v, v' \in \Re^n$ $f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$
L'ipotesi dice che l'unico elemento del nucleo di *f* è l'elemento 0.
Ciò che non dice è se *v* e *v′* vengono mandati in 0 mediante *f*. $f(v) = f(v') = 0$
Consideriamo l'immagine della <u>differenza</u> tra i due vettori:
$f(v - v')$ che, per la linearità della somma, è uguale a $f(v) - f(v')$
Abbiamo già detto che $f(v) = f(v')$, quindi $f(v) - f(v') = 0$
Se $f(v) - f(v') = f(v - v') = 0$ vuol dire che l'elemento del dominio $(v - v') \in \operatorname{Ker} f$
Ma per ipotesi sappiamo che l'unico elemento del nucleo di *f* è l'elemento 0. Ne deduciamo che $v - v' = 0$ e $v = v'$ c.v.d.

APPLICAZIONI LINEARI TRA SPAZI VETTORIALI

Le applicazioni lineari sono definite anche tra spazi vettoriali diversi, purché considerati sullo stesso campo *K*.

Data un'applicazione tra due spazi *V* e *W* $f : V \to W$ su *K*, essa si dice lineare se rispetta le condizioni di *additività* e *omogeneità* già descritte in generale per le applicazioni lineari.

Ad esempio, si può definire un'applicazione tra lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 e lo spazio dei polinomi nell'indeterminata *t* di grado minore o uguale a 2.

$$f : M_{2\times 2}(\Re) \to \Re_2[t] \quad / \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d-3b) + 4at + (c+4a)t^2$$

Per dimostrare che *f* sia lineare, basta verificare che

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{e che} \quad f\left(k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = k \cdot f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. determinata la matrice somma $\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$, calcoliamone l'immagine:

$$f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = (d+d'-3b-3b') + 4(a+a')t + (c+c'+4a+4a')t^2$$

ovvero $(d-3b) + 4at + (c+4a)t^2 + (d'-3b') + 4a't + (c'+4a')t^2$ ossia $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

2. determinata la matrice prodotto $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$, calcoliamone l'immagine:

$f\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = (kd-3kb) + 4kat + (kc+4ka)t^2$ ovvero $k(d-3b) + 4kat + k(c+4a)t^2 =$

$= k\left((d-3b) + 4at + (c+4a)t^2\right)$ ossia $k \cdot f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Quindi è vero che *f* è un'applicazione lineare, perché è additiva ed omogenea.

Delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali sono definiti anche i sottoinsiemi, rispettivamente, di dominio e codominio della applicazione *f*: $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, cioè nucleo e immagine di *f*.

Essi corrispondono a $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) := \{v \in V : f(v) = 0\}$

$\operatorname{Im} f = f(V) := \{f(v) : v \in V\}$

Fin qui nulla di nuovo, sono nozioni già incontrate.

Definiamo un'altra caratteristica dei sottoinsiemi nucleo e immagine.

$\operatorname{Ker} f$, oltre ad essere sottoinsieme del dominio *V* dell'applicazione, ne è anche un sottospazio vettoriale.

$\operatorname{Im} f$, oltre ad essere sottoinsieme del codominio *W* dell'applicazione, ne è anche un sottospazio vettoriale.

Vediamo di dimostrare tali affermazioni

1. Data $f : V \to W$ su K, $\text{Ker } f$ è sottospazio vettoriale di *V*.

Per dimostrare se un insieme è un sottospazio, dobbiamo far riferimento alle tre condizioni:

I. vediamo se l'elemento nullo appartiene a $\text{Ker } f$

Poiché *f* è lineare per ipotesi, è vero che $f(\underline{0}) = \underline{0}$, quindi $\underline{0} \in \text{Ker } f$

II. $\forall v, v' \in \text{Ker } f$ deve essere che $v + v' \in \text{Ker } f$

per appartenere al nucleo di *f*, un vettore deve avere come immagine il vettore nullo: quindi deve essere $f(v + v') = \underline{0}$, che, per la linearità, equivale a $f(v) + f(v') = \underline{0}$

che è vero perché $v, v' \in \text{Ker } f$

III. $\forall v \in \text{Ker } f$ $\forall k \in K$ deve essere che $k \cdot v \in \text{Ker } f$

Ossia deve essere vero che $f(k \cdot v) = \underline{0}$, ossia, per la linearità, $k \cdot f(v) = \underline{0}$, che è vero per ipotesi.

Data $f : V \to W$ su un campo K, $\text{Ker } f$ è sottospazio vettoriale di *V*

2. Data $f : V \to W$ su K, $\text{Im } f$ è sottospazio vettoriale di *W*.

Verifichiamo come prima le tre condizioni:

I. Se il vettore nullo appartiene a $\text{Im } f$ deve essere vero che $f(v) = \underline{0}$ per un qualche $v \in V$

Dal momento che *f* è lineare per ipotesi, è vero che $f(\underline{0}) = \underline{0}$; quindi esiste un vettore *v* tale che $f(v) = \underline{0}$, cioè il vettore nullo.

II. $\forall w, w' \in \text{Im } f$ deve essere che $w + w' \in \text{Im } f$

se $w, w' \in \text{Im } f$, vuol dire che $f(v) = w$ e $f(v') = w'$ per dei $v, v' \in V$

Quindi, se deve essere vero che $w + w' \in \text{Im } f$ deve essere anche vero che $f(v) + f(v') \in \text{Im } f$

ovvero, per la linearità, $f(v + v') \in \text{Im } f$

Abbiamo trovato un vettore la cui immagine è $w + w'$, ossia v+v'

III. $\forall w \in \text{Im } f$ $\forall k \in K$ deve essere che $k \cdot w \in \text{Im } f$

se $w \in \text{Im } f$ vuol dire che $f(v) = w$ per un qualche $v \in V$

quindi, se deve essere vero che $k \cdot w \in \text{Im } f$, deve essere anche vero che $k \cdot f(v) \in \text{Im } f$

ovvero, per la linearità, $f(k \cdot v) \in \text{Im } f$

Abbiamo trovato un vettore la cui immagine è $k \cdot w$ ossia $f(k \cdot v) = k \cdot w$ c.v.d.

Data $f : V \to W$ su un campo K, $\text{Im } f$ è sottospazio vettoriale di *W*.

INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI

Sia *V* uno spazio vettoriale su un campo K, e siano $v_1 ... v_k \in V$ vettori di *V*;
Si definisce l'*insieme delle combinazioni lineari* di $v_1 ... v_k$ come

$$\operatorname{Span}(v_1 ... v_k) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot v_j \quad , c_1, ..., c_k \in \mathrm{K} \right\}$$

Tale insieme è il più piccolo sottospazio vettoriale di V *contenente i vettori* $v_1 ... v_k$.

Dimostriamo le affermazioni contenute nella frase precedente.

1. $v_1 ... v_k$ appartengono a $\operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$

Preso un qualsiasi v_j, esso sarà un elemento dell'insieme delle combinazioni lineari se può essere espresso a sua volta come combinazione lineare. Cioè deve essere verificata l'uguaglianza $v_j = c_1 \cdot v_1 + ... + c_j \cdot v_j + ... + c_k \cdot v_k$. Tale uguaglianza è vera solo se
$c_1 = ... = c_{j-1} = \quad = c_{j+1} = ... = c_k = 0$ e $c_j = 1$.
Dal momento che tutti i vettori $(v_1 ... v_k)$ sono esprimibili come combinazione lineare, essi sono elementi di $\operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$.

2. $\operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$ è un sottospazio di *V*.

Per dimostrare ciò, facciamo riferimento alle solite tre condizioni dei sottospazi.
I. Per appartenere all'insieme delle combinazioni lineari, lo 0 deve poter essere espresso a sua volta come combinazione lineare. Questo è possibile se tutti i coefficienti della combinazione sono nulli.
Quindi $0 \in \operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$

II. Date le combinazioni $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j$, $\sum_{j=1}^{k} d_j v_j \in \operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$, deve essere vero che
$\left(\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{k} d_j v_j \right) \in \operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$, cioè la somma delle due combinazioni lineare deve essere a sua volta una combinazione lineare. Unendo le due sommatorie, si ottiene:
$\sum_{j=1}^{k} (c_j + d_j) v_j$, dove $c_j + d_j$ è la somma di due numeri reali e dunque un numero reale.

III. $\forall \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \in \operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$ e $\forall d \in \mathrm{K}$, deve essere che $d \cdot \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \in \operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$
Portando la costante *d* all'interno del segno di sommatoria, si ottiene:
$\sum_{j=1}^{k} d \cdot (c_j v_j) = \sum_{j=1}^{k} (d \cdot c_j) v_j$, dove $d \cdot c_j$ è il prodotto scalare tra due numeri reali.
Avendo potuto esprimere sia la somma che il prodotto come combinazioni lineari, possiamo dire che $\operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$ è un sottospazio di *V*.

3. $\operatorname{Span}(v_1 ... v_k)$ è il più piccolo sottospazio di *V*.

Per giustificare questa affermazione, basti pensare che un sottospazio contiene sicuramente le combinazioni lineari $\sum_{j=!}^{k} c_j v_j$ di uno spazio.

$\text{Span}(v_1 ... v_k)$ si dice sottospazio vettoriale di V generato da $v_1 ... v_k$ oppure, equivalentemente, si dice che $v_1 ... v_k$ *generano* il sottospazio $\text{Span}(v_1 ... v_k)$.

Si dice che $v_1 ... v_k \in V$ *generano* (o *sono generatori* di) lo spazio V sul campo K se esistono dei coefficienti $c_1 ... c_k \in \text{K}$ tali che ogni vettore v di V può essere espresso come combinazione lineare di $v_1 ... v_k$; cioè $\forall v \in V \quad \exists c_1 ... c_k \ / \ v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$

In particolare, *V è generato da $v_1 ... v_k$ se e solo se* $V = \text{Span}(v_1 ... v_k)$

Vediamo degli esempi:

Esempio 1

Sullo spazio $V = \Re^2$, consideriamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ci chiediamo se v_1, v_2, v_3 generano $\Re^2$; cioè ci chiediamo se è possibile esprimere *qualsiasi* vettore di $\Re^2$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \Re^2 \ \exists \ c_1, c_2, c_3 \in \Re \ / \ c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

La relazione è vera per tutte le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b \end{cases}$

Al di là di *quali* soluzioni abbia il sistema, ci interessa prima di tutto *se* il sistema stesso ne abbia.
In effetti, questo sistema in particolare ha infinite soluzioni.

Ad esempio per $c_1 = a$, si ha che $c_2 = 0$ e che $c_3 = \dfrac{b-a}{3}$

Dal momento che il sistema ha *almeno una* soluzione, possiamo dire che v_1, v_2, v_3 generano $\Re^2$.

Esempio 2

Consideriamo, sempre su $V = \Re^2$, i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

I vettori generano $\Re^2$?

Come prima, deve essere vero $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \Re^2 \ \exists \ c_1, c_2, c_3 \in \Re \ / \ c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

La relazione è verificata dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} c_1 - c_2 + 4c_3 = a \\ 2c_1 - 2c_2 + 8c_3 = b \end{cases}$

Poiché la seconda riga è il doppio della prima, le soluzioni del sistema sono tutte quelle per cui $b = 2a$.

Questa condizione limita la scelta del vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, perciò i vettori v_1, v_2, v_3 non generano tutto lo spazio $\Re^2$.

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Un insieme di vettori $v_1,...,v_k \in V$ di uno spazio vettoriale V si dice *linearmente dipendente* se esistono
$c_1,...,c_k \in \Re$ *non tutti nulli* tali che

$$c_1 v_1 + ... + c_k v_k = 0$$

Viceversa $v_1,...,v_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti, ovvero se $c_1 v_1 + ... + c_k v_k = 0$ implica $c_1 = ... = c_k = 0$

Vediamo subito un esempio: determiniamo se i vettori sono linearmente dipendenti o meno.

$$V = \Re^2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 con coefficienti generici c_1, c_2, c_3 e vediamo in che modo si annulla: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Svolgendo i calcoli si determina il sistema $\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$, che ha infinite soluzioni.

Quindi, dato che $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ *non* è l'unica soluzione del sistema, $v_1 . v_2, v_3$ sono vettori linearmente dipendenti.

Se invece consideriamo solamente v_1, v_2 il sistema diventa $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ che evidentemente ha un'unica soluzione, ossia $c_1 = c_2 = 0$. v_1, v_2 sono dunque linearmente indipendenti.

<u>Osservazione</u>
Dire che i vettori $v_1 ... v_k \in V$ sono linearmente dipendenti equivale a dire che è possibile ricavare uno di loro come combinazione lineare degli altri. Infatti, se abbiamo $c_1 v_1 + ... + c_k v_k = 0$ con, per esempio $c_1 \neq 0$, allora $v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2 - .... - \frac{c_k}{c_1} v_k$.

In simboli: $v_1 ... v_k \in V$ *linearmente dipendenti* $\Leftrightarrow \exists\, j_0 \in \{1...k\}, \exists\, d_1 ... \overleftrightarrow{d_{j_0}} ... d_k \in K \ / \ v_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{k} d_j v_j$

dove $\overleftrightarrow{d_{j_0}}$ indica che il coefficiente d_{j_0} viene escluso dall'insieme $d_1 .... d_k$.

<u>Dimostrazione 1</u> $\exists\, j_0 \in \{1...k\}, \exists\, d_1 ... \overleftrightarrow{d_{j_0}} ... d_k \in K \ / \ v_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{k} d_j v_j \Rightarrow v_1 ... v_k$ *linearmente dipendenti*

Sappiamo per ipotesi che $v_{j_0} = d_1 v_1 + ... + \overleftrightarrow{d_{j_0} v_{j_0}} + ... + d_k v_k$;

Portando il termine v_{j_0} a secondo membro, otteniamo: $d_1 v_1 + ... - v_{j_0} + ... + d_k v_k = 0$

Il termine v_{j_0} ha coefficiente pari a -1. Dal momento che esiste almeno un coefficiente non nullo nella combinazione lineare nulla, possiamo dire che $v_1 ... v_k$ sono linearmente dipendenti. c.v.d.

Dimostrazione 2 $v_1 ... v_k$ *linearmente dipendenti* $\Rightarrow \exists\, j_0 \in \{1...k\}, \exists\, d_1 ... \overleftrightarrow{d_{j_0}} ... d_k \in \mathrm{K}\ /\ v_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{k} d_j v_j$

Se $v_1 ... v_k$ sono linearmente dipendenti, esiste almeno un $c_{j_0} \neq 0$ nella loro combinazione lineare $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j = 0$. Isolando l'addendo $c_{j_0} v_{j_0}$, si ottiene $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{k} c_j v_j = -c_{j_0} v_{j_0}$

Dividendo entrambi i membri per $-c_{j_0} \neq 0$, troviamo che $v_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{k} \left(\left(-\frac{c_j}{c_{j_0}} \right) \cdot v_j \right)$,

che è una combinazione lineare di v_{j_0}. ~~Sostituendo~~ Ponendo $d_j =$ $-\frac{c_j}{c_{j_0}}$ ~~con il più generico d_j~~ (cosa possibile perché ~~c_j,~~ c_{j_0} $\neq 0$ ~~, $d_j \in \Re$~~) si troverà la relazione che si voleva dimostrare.
c.v.d.

> Se i vettori $v_1 ... v_k \in V$ sono generatori di V, allora $\forall v_{k+1} \in V$ anche $v_1 ... v_{k+1}$ generano *V*.
> Al contrario, ~~se $v_1 ... v_k \in V$~~ non è vero in generale che anche $v_1 ... v_{k-1} \in V$ generano *V*.

Dimostrazione

Dall'ipotesi sappiamo che $\forall v \in V\ \exists\, c_1 ... c_k \in \mathrm{K}\ /\ v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$

Dobbiamo mostrare che $\forall v \in V\ \exists\, c_1 ... c_{k+1} \in \mathrm{K}\ /\ v = \sum_{j=1}^{k+1} c_j v_j$

Se consideriamo il vettore $v \in V = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$, possiamo scriverlo anche come

$v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j + 0 \cdot v_{k+1}$, che è a tutti gli effetti una combinazione lineare di $v_1 .... v_{k+1}$ con $c_{k+1} = 0$

Potendo scrivere *v* come $\sum_{j=1}^{k+1} c_j v_j$, è vero che $v_1 .... v_{k+1}$ sono generatori di *V*.

> Se i vettori $v_1 .... v_k \in V$ sono linearmente indipendenti, allora lo sono anche i vettori $v_1 ... v_{k-1}$.
> Al contrario, se $v_1 ... v_k \in V$ sono linearmente indipendenti, non è vero in generale che lo sono anche $v_1 ... v_{k+1}$.

Dimostrazione
Per ipotesi sappiamo che $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_k = 0$, e vogliamo mostrare che $\sum_{j=1}^{k-1} c_j v_j = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_{k-1} = 0$

Aggiungendo alla combinazione l'addendo $0 \cdot v_k$ non ne cambiamo il valore: $\sum_{j=1}^{k-1} c_j v_j + 0 \cdot v_k = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$,

$c_k = 0$; per ipotesi la combinazione lineare di $v_1 .... v_k$ è nulla solo
se ha tutti i coefficienti nulli: dunque tale affermazione è vera anche per la combinazione di $v_1 .... v_{k-1}$,
che altro non è se non la combinazione di $v_1 .... v_k$ meno un elemento $0 \cdot v_k$.

BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

> Sia *V* uno spazio vettoriale. Un insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ di vettori di *V* è una *base* di *V* se:
> a) $V = \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n)$, cioè $v_1,\dots,v_n$ sono un *sistema di generatori* di *V*.
> b) $v_1,\dots,v_n$ sono linearmente indipendenti.

<u>Esempio</u> : I vettori $e_1 \dots e_n \in \Re^n$, dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots\dots\dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sono una base di $\Re^n$, la cosiddetta *base canonica*, che si indica spesso con $\mathcal{E}$.

Infatti: $\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$, perché $c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

ossia $\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ se il sistema $\begin{cases} c_1 = 0 \\ \dots. \\ c_n = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione (e infatti è così);

inoltre $\forall v \in \Re^n$ l'uguaglianza $c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ e quindi il sistema $\begin{cases} c_1 = a_1 \\ \dots. \\ c_n = a_n \end{cases}$

ha almeno una soluzione. Quindi $e_1 \dots e_n$ sono linearmente indipendenti e generatori di $\Re^n$, e dunque ne costituiscono una base.

Basi canoniche di altri spazi vettoriali

1) Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \Re_2[t]$ dei polinomi in una variabile a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 . Allora $p_0 = 1$, $p_1 = t$, $p_2 = t^2$ formano una base di *V*. Infatti sono un sistema di generatori: un generico polinomio $p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ si scrive come combinazione lineare di $p_0 \dots p_2$ così: $p = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2$. Sono anche linearmente indipendenti: infatti, per il principio di identità dei polinomi, un polinomio è identicamente nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono zero. Quindi $\{1, t, t^2\}$ è la base canonica di $\Re_2[t]$

Lo stesso ragionamento ci dice che $\{1, t, t^2 \dots t^n\}$ è base dello spazio $\Re_n[t]$

2) Consideriamo lo spazio $V = M_{m \times n}(\Re)$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali. La sua base canonica sarà formata da gli elementi banali e_{ij}, ossia dalle matrici con un elemento pari a 1 e gli altri pari a 0 nelle $m \cdot n$ possibilità. Tali elementi sono generatori di *V* perché la generica

matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ se $\begin{cases} c_{11} = a_{11} \\ \dots. \\ c_{mn} = a_{mn} \end{cases}$

Analogo discorso per l'indipendenza lineare.

TEOREMI SULLE BASI

Sia V uno spazio vettoriale. E siano $v_1,...,v_k$ generatori di V.
Allora dall'insieme $\{v_1,...,v_k\}$ si può estrarre una base di V.
Cioè, se $v_1,...,v_k$ non sono linearmente indipendenti (in tal caso la base è l'insieme stesso) è possibile eliminare alcuni vettori dell'insieme (non in modo casuale) per ottenere una relazione di indipendenza lineare e quindi trovare una base di V.

Teorema del completamento: Sia $\mathcal{B} = \{v_1,...v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e siano $w_1....w_p \in V$ (con $p \le n$) vettori linearmente indipendenti. Allora esistono $n - p$ vettori di $\mathcal{B}$ che insieme a $w_1....w_p$ formano una base di V.
I vettori aggiunti dovranno conservare la relazione di indipendenza lineare con gli altri.

<u>Osservazione</u>: Se $w_1....w_p$ sono vettori linearmente indipendenti di $\Re^n$, per *completarli a una base* basta aggiungervi $n - p$ vettori della base canonica. Infatti, basta estrarre una base dall'insieme $\{w_1,..., w_p, e_1,...., e_n\}$. Questo è possibile ammettendo che V abbia una base. Non tutti gli spazi vettoriali hanno una base (a meno di definire basi con un numero infinito di elementi; in tal caso, si dirà che lo spazio ha dimensione infinita) .

<u>Esempio</u>
Prendiamo i vettori $w_1 = (1\ 0\ 1\ \ 0)$ e $w_2 = (1\ 2\ 3\ \ 4)$ $\in \Re^4$
Vogliamo dimostrare che sono linearmente indipendenti e poi completare $\{w_1, w_2\}$ a una base di $\Re^4$
Per vedere che sono linearmente indipendenti dobbiamo risolvere il sistema $c_1w_1 + c_2w_2 = 0$ che, svolti i calcoli, si nota che ammette l'unica soluzione $c_1 = c_2 = 0$. Per completare a una base di $\Re^4$ cominciamo con lo scrivere w_1 come combinazione lineare dei vettori della base canonica $\mathcal{E}$:
$w_1 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4$; per il teorema del completamento, è possibile sostituire w_1 al posto di uno qualunque dei vettori di $\mathcal{E}$ che compaiono con coefficiente non nullo ottenendo ancora una base di $\Re^4$.
Per esempio, mettendo w_1 al posto di e_1 otteniamo la base $\mathcal{B}_1 = \{w_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Ripetendo lo stesso procedimento con w_2 e sostituendolo, ad esempio, con e_3 otteniamo la base $\{w_1, w_2, e_2, e_4\}$, che completa $\{w_1, w_2\}$ come volevamo.

E ora una conseguenza fondamentale del precedente teorema:

Due basi di uno spazio vettoriale V hanno sempre lo stesso numero di elementi

<u>Dimostrazione</u>: Siano $\mathcal{B} = \{v_1,..., v_k\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1,..., w_h\}$ due basi di V e supponiamo per assurdo che $k > h$. Allora il teorema del completamento applicato con $n = k$ e $p = h$ ci dice che esistono $k - h$ elementi di $\mathcal{B}$ che aggiunti a $\mathcal{C}$ formano una base di V. Ma $\mathcal{C}$ era già una base, e quindi un insieme *massimale* di vettori linearmente indipendenti, il che è una contraddizione. Un analogo ragionamento esclude la possibilità che h sia maggiore di k; quindi $h = k$.
Inoltre, <u>si osserva che il numero di elementi di una base non dipende dalla base scelta</u>.

DIMENSIONE di uno spazio

Se $\{v_1,...v_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale *V*, il numero *n* (che non dipende dalla base scelta), si chiama *dimensione* di *V*; scriveremo $n = \dim V$ (oppure $n = \dim_K V$, se è necessario specificare che *V* è uno spazio vettoriale sul campo K). Lo spazio vettoriale $\{0\}$ composto dal solo vettore nullo ha dimensione zero. Infine, diremo che uno spazio vettoriale privo di sistemi di generatori finiti ha *dimensione infinita*.

Per calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale *V* basta trovarne una base. Per esempio, grazie alla base canonica vediamo subito che $\Re^n$ ha dimensione *n*, che $\Re_n[t]$ ha dimensione $n+1$ e che $M_{m\times n}(\Re)$ ha dimensione $m\cdot n$.

<u>Esempio</u>:

Consideriamo l'insieme $V=\{A \in M_{2,2}(\Re)\ /\ a_{11}+a_{22}=0\}$; non è difficile dimostrare che *V* è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\Re)$. Il generico elemento di *V* è della forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, che dipende da tre parametri. Questo suggerisce che *V* abbia dimensione 3; per verificarlo, calcoliamone una base.
Se vogliamo che i parametri *a*,*b* e *c* siano le coordinate rispetto a una base, la matrice generica *A* si deve poter scrivere come $A = aM_1 + bM_3 + cM_3$ dove $\{M_1, M_2, M_3\}$ è la base che cerchiamo. Guardando alla forma di *A*, è chiaro che ciò è possibile ~~solo~~ prendendo $M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per costruzione, $\{M_1, M_2, M_3\}$ è un sistema di generatori di *V*; rimane da vedere che sono anche linearmente indipendenti. Ma la relazione di dipendenza lineare data da $c_1M_1 + c_2M_2 + c_3M_3 = 0$ implica subito $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. c.v.d.

Altre osservazioni

Sia *V* uno spazio vettoriale e sia $\dim V = n$ con $v_1...v_k \in V$

1. se $k > n$ $v_1...v_k$ non sono linearmente indipendenti. Questo lo conferma il teorema del completamento: se infatti su uno spazio *V* fossero definiti più vettori di quanti ne richiederebbe $\dim V$ che sono linearmente indipendenti, sarebbe possibile aggiungere alcuni vettori per completare i precedenti a base di *V*. Ma una base contiene tanti elementi quanta è la dimensione dello spazio, quindi si cadrebbe in contraddizione.

2. Se $k < n$ $v_1...v_k$ non sono generatori di *V*. Questo ce lo conferma il primo teorema sulle basi: se fossero definiti su *V* meno vettori di quanti ne richiederebbe $\dim V$, sarebbe possibile eliminarne alcuni per formare una base di *V*. Ma una base contiene tanti elementi quanti ne indica dim*V*, e si cadrebbe in contraddizione.

3. Se invece $k = n$, $v_1...v_k$ sono linearmente indipendenti ~~e~~ se e solo se sono generatori di *V*. Si può dire che la lineare indipendenza implica che i vettori siano generatori di *V*. Questo ce lo dice il terzo teorema sulle basi e la relativa dimostrazione.

Quindi, per verificare che un insieme formato da un numero di vettori su *V* pari alla dimensione di *V* è una base di *V*, è sufficiente dimostrare che i vettori stessi sono generatori dello spazio oppure linearmente indipendenti.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e W un suo sottospazio. Allora:
1) W ha dimensione finita minore o uguale a n;
2) $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

Dimostrazione
1) Se $W = \{0\}$ l'enunciato è chiaro. Altrimenti, sia w_1 un elemento non nullo di W. Se $\{w_1\}$ non è un insieme massimale in W di vettori linearmente indipendenti, troviamo un $w_2 \in W$ tale che w_1, w_2 sono linearmente indipendenti. Se $\{w_1, w_2\}$ non è un insieme massimale in W di vettori linearmente indipendenti, troviamo un $w_3 \in W$ tale che w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti. Continuando così, prima o poi dovremo fermarci, perché in V (che contiene W) non possono esistere più di n elementi linearmente indipendenti fra loro. Quindi troveremo un insieme $\{w_1,..., w_m\}$ (con $m \leq n$) massimale in W di vettori linearmente indipendenti, ovvero una base di W.
2) Se $\dim W = n$, esiste una base di W composta da n elementi. Questa è anche una base di V e quindi $W = V$. Il viceversa è ovvio.

Non tutti gli spazi hanno la base canonica. Vediamo un esempio.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \ / \ x + y + z = 0 \right\} \text{ sottospazio di } \Re^3.$$

Considerando la base canonica di $\Re^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$, si nota subito che i suoi elementi non appartengono a W, perché la somma delle loro componenti non è nulla. Dunque W non ha base canonica. Questo si poteva dedurre a priori applicando il teorema dimostrato precedentemente. Infatti, dal momento che $W \neq \Re^3$ sappiamo che $\dim W < \dim \Re^3$. Dunque la base canonica dello spazio, composta da 3 elementi, non poteva essere anche una base del sottospazio.

COORDINATE DI UN VETTORE RISPETTO A UNA BASE

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e sia $\mathcal{B} = \{v_1,...v_n\}$ una base di V.

Allora per ogni vettore v di V i coefficienti $c_1...c_n \in \mathrm{K}$ tali che $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ (ossia tali che v sia esprimibile come combinazione lineare) *sono unici*.
Infatti, se $\{v_1,...v_n\}$ è una base di V, vuol dire che $v_1...v_n$ sono generatori di V e quindi v si può esprimere come combinazione lineare per definizione di vettori generatori.
Il fatto che i coefficienti $c_1...c_n$ siano unici, però, dipende dall'indipendenza lineare di $v_1...v_n$ (garantita dal fatto che i vettori formano una base).
Dimostrazione. Supponiamo di poter scrivere un vettore $v \in V$ mediante due combinazioni lineari diverse: cioè supponiamo che $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j = \sum_{j=1}^{n} c'_j v_j$.
Se le due combinazioni sono uguali, è anche vero che la loro differenza è nulla:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j v_j - \sum_{j=1}^{n} c'_j v_j = 0 \ , \text{ ovvero } \sum_{j=1}^{n} (c_j - c'_j) v_j = 0$$

A questo punto applichiamo l'indipendenza lineare di $v_1...v_n$:
Il fatto che i vettori delle due combinazioni sono linearmente indipendenti implica che $c_j - c'_j = 0 \quad \forall\ j = 1...n$. Da ciò discende che $c_j = c'_j$ e quindi i coefficienti sono unici.

I coefficienti *unici* $c_1 ... c_n \in K$ che esprimono ogni *v* di *V* come combinazione lineare degli elementi di una base $\mathcal{B}$ si dicono *coordinate di v rispetto a* $\mathcal{B}$ e si indicano con $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ .... \\ c_n \end{pmatrix}$

Vediamo un esempio:

Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3 \ / \ x + y + z = 0 \right\}$; consideriamo la sua base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Vogliamo scrivere il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Consideriamo la generica combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$

Troviamo i coefficienti c_1, c_2 tali che la combinazione sia uguale a *v*. Ossia risolviamo il sistema $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 - c_1 = -7 \\ -c_2 = 5 \end{cases}$;

la soluzione è unica: $c_1 = 2 \ \ c_2 = -5$

Quindi scriveremo $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, che è il vettore *v* rispetto alla base $\mathcal{B}$, definito mediante le sue coordinate rispetto alla base.

Vediamo di scrivere lo stesso vettore *v*, ma rispetto a un'altra base: $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

I coefficienti c_1, c_2 saranno dati dalla soluzione del sistema $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -7 \\ -c_1 - c_2 = 5 \end{cases}$ ossia $c_1 = 2 \ \ c_2 = -7$

Scriveremo a questo punto $v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ il vettore *v* rispetto alla base $\mathcal{C}$.

In effetti, in questo caso particolare, si capisce che le coordinate dei vettori di *W* rispetto alle sue basi sono 2 perché $x + y + z = 0$ è un piano, e i vettori che giacciono su di esso hanno la libertà di muoversi solamente in due direzioni.

Vediamo ora di trovare le coordinate di di un vettore $v \in \Re^n = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.

Mediante il procedimento descritto, si arriva alla definizione del sistema $\begin{cases} c_1 = a_1 \\ .... \\ c_n = a_n \end{cases}$:

le coordinate di un vettore di $\Re^n$ *rispetto ad* $\mathcal{E}$ *sono le componenti del vettore v stesso.*

TEOREMA DI GRASSMANN

Tra i sottospazi vettoriali di uno spazio a dimensione finita e i sottoinsiemi di un insieme finito esiste un certo parallelismo. Ad esempio, il numero di elementi di un insieme (detto *cardinalità*) corrisponde alla dimensione di uno spazio; l'intersezione tra insiemi corrisponde all'intersezione tra sottospazi, e l'unione tra insiemi corrisponde alla somma tra sottospazi (e non all'unione, che non è un sottospazio). Un'analogia importante è quella che esiste per quanto riguarda il principio di inclusione/esclusione degli insiemi: esso afferma che, dati *n* insiemi, la cardinalità della loro unione è uguale alla somma delle cardinalità dei singoli insiemi meno la cardinalità di tutte le possibili intersezioni a due a due, più la cardinalità delle intersezioni a tre a tre, e così via fino ad *n*, alternando i segni. Al di là dell'espressione rigorosa di questo principio, soffermiamoci sull'analogia che esiste con i sottospazi vettoriali. In effetti questo parallelismo esiste solo nel caso $n = 2$ e non è valido per i casi con *n* superiori.

Il principio di inclusione/eslcusione, per $n = 2$, afferma che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

dove la notazione con le due stanghette indica la cardinalità di un insieme.

Trasponendo i termini nell'ambito dei sottospazi vettoriali, e quindi considerando la cardinalità come una dimensione, l'unione tra insiemi come la somma tra sottospazi, la precedente formula diventa il *teorema di Grassmann*:

Siano *U* e *W* sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita *V*. Allora $$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

<u>Dimostrazione</u>

Sia $\{v_1,\ldots,v_k\}$ una base di $U \cap W$, dove $k = \dim(U \cap W)$. Per il teorema del completamento, possiamo completarla in *U* a una base $\{v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h\}$ di *U*, con k+ $h = \dim U$, e in *W* a una base $\{v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_p\}$ di *W*, con k+ $p = \dim W$. Allora ci basta provare che $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h,w_1,\ldots,w_p\}$ è una base di $U+W$; infatti, in tal caso avremo

=(k+h)+(k+p)-k

$\dim(U+W) = \dim\mathcal{B} = k + \cancel{(h-k)+(p-k)}\; h + p \cancel{-k} = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$,

come voluto.

1. Verifichiamo prima che $v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h,w_1,\ldots,w_p$ generano $U+W$; ossia verifichiamo che ogni elemento $u+w,\ u \in U, w \in W$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori.

Dato che $\{v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h\}$ è una base di *U* per ipotesi, i vettori $v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h$ generano *U*; dunque ogni vettore $u \in U$ può essere scritto come $u = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j$.

Inoltre, dato che $\{v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_p\}$ è una base di *W* per ipotesi, ogni $w \in W$ può essere scritto come

$w = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j$.

Allora, ogni vettore $u+w \in U+W$ è esprimibile come $u+w = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j + \sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j$

ovvero $u+w = \sum_{j=1}^{k} (a_j + c_j) v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j$, che è una combinazione lineare dei vettori $v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_h,w_1,\ldots,w_p$. Quindi tali vettori generano lo spazio $U+W$.

2. Resta da dimostrare l'indipendenza lineare dei vettori $v_1,\dots v_k, u_1,\dots u_h, w_1,\dots . w_p$.

Cioè dobbiamo provare che $\left(\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j = 0\right) \Rightarrow c_j = b_j = d_j = 0 \quad \forall j$

Visto che $\{v_1,\dots v_k, u_1,\dots . u_h\}$ e $\{v_1,\dots v_k, w_1,\dots . w_p\}$ sono basi per ipotesi e dunque i vettori che le compongono sono linearmente indipendenti fra loro, notiamo che la proposizione da dimostrare è già verificata sia considerando solo le prime due sommatorie, sia considerando solo la prima e la terza. Proviamo a usare questa conoscenza nella nostra dimostrazione.

Intanto, riscriviamo la proposizione spostando la terza sommatoria al secondo membro:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j = -\sum_{j=1}^{p} d_j w_j$$

Notiamo che il primo membro, poiché $v_1,\dots v_k, u_1,\dots u_h \in U$, appartiene ad *U*.

Notiamo anche che, per motivi analoghi, il secondo membro appartiene a *W*.

Diamo, per comodità, un nome unico a entrambi i membri (che sono uguali): chiamiamoli *v*.

Quindi sappiamo che $v \in U$ e che $v \in W$; ciò vuol dire che *v* appartiene alla loro intersezione: $v \in U \cap W$. Per ipotesi, il sottospazio $U \cap W$ ha base $\{v_1,\dots . v_k\}$, perciò ogni elemento $v \in U \cap W$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di tale base:

ossia ogni *v* si può scrivere come $v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$.

Dato che *v* è uguale ai due membri della proposizione da dimostrare, possiamo scrivere che:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j = -\sum_{j=1}^{p} d_j w_j = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j = v.$$

Considerando solo la seconda uguaglianza $-\sum_{j=1}^{p} d_j w_j = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$, troviamo che

$v - v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j = 0$, che corrisponde alla proposizione da dimostrare senza la seconda sommatoria. Avevamo già detto che, siccome $\{v_1,\dots v_k, w_1,\dots . w_p\}$ è una base e i suoi componenti sono vettori linearmente indipendenti, la proposizione senza seconda sommatoria era verificata per ipotesi.

Quindi possiamo scrivere che:

$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j = 0\right) \Rightarrow a_j = d_j = 0 \quad \forall j$, perché $v_1,\dots v_k, w_1,\dots . w_p$ sono linearmente indipendenti per ipotesi.

A questo punto, la proposizione iniziale $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j + \sum_{j=1}^{p} d_j w_j = 0$, dato che ~~la terza sommatoria è nulla solo se~~ i coefficienti d_j sono tutti nulli, diventa:

quindi anche questi coefficienti sono nulli

$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=1}^{h} b_j u_j = 0$, ~~che è vero~~ perché $v_1,\dots v_k, u_1,\dots u_h$ sono linearmente indipendenti per ipotesi.

Dunque $v_1,\dots v_k, u_1,\dots u_h, w_1,\dots . w_p$ sono vettori linearmente indipendenti.

Dato che $v_1,\dots v_k, u_1,\dots u_h, w_1,\dots . w_p$ sono generatori di $U+W$ e sono linearmente indipendenti, costituiscono una base di $U+W$. Dato che $\dim \mathcal{B} = \dim(U+W)$, abbiamo trovato che

$\cancel{h+p-k=} \dim U + \dim W - \dim(U+W) = \dim(U+W)$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA DELLA DIMENSIONE (o di "nullità più rango")

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

Dimostrazione

Come per il teorema di Grassmann, sfruttiamo il teorema del completamento. Consideriamo dunque una base di Ker f $\{v_1,...v_k\}$; col suddetto teorema la possiamo completare a una base $\{v_1,...v_k,v_{k+1},....v_n\}$ di V. Da ciò deduciamo subito che $\dim(\operatorname{Ker} f) = k$ e $\dim V = n$.

Se il teorema è vero, dovrà essere $\dim(\operatorname{Im} f) = n - k$, ossia ogni base di Im f dovrà contenere $n-k$ elementi. ~~Una base del genere dovrà contenere i k elementi del nucleo e gli n elementi del dominio.~~

Dato che Im f è un sottospazio vettoriale del codominio, e non del dominio, gli elementi della sua base saranno della forma $f(v)$, con ~~$v \in \operatorname{Ker} f$ oppure~~ $v \in V$.

Poiché il nucleo è l'insieme degli elementi che hanno per immagine il vettore nullo, possiamo scrivere con sicurezza che $f(v_1) = ... = f(v_k) = \underline{0}$. Quindi una ~~la~~ base ~~generica~~ di Im f potrà ~~dovrà~~ contenere solamente le immagini degli altri ~~dei~~ vettori della base di V, ossia $f(v_{k+1}),..., f(v_n)$.

Ora basta dimostrare che $\{f(v_{k+1}),..., f(v_n)\}$ è una base di Im f e il teorema sarà provato.

Come al solito, per dimostrare che dei vettori formano una base, bisogna dimostrare che i vettori stessi generano lo spazio a cui appartengono e che sono linearmente indipendenti.

1. Affinché $f(v_{k+1}),..., f(v_n)$ siano generatori di Im f, deve essere vera la seguente proposizione:

$$\forall w \in \operatorname{Im} f \quad \exists c_{k+1},...,c_n \ / \ w = \sum_{j=k+1}^{n} c_j f(v_j).$$

Dato che $w \in \operatorname{Im} f$, vuol dire che può essere scritto come immagine di un vettore del dominio V.

Quindi w può essere scritto come $w = f(v)$.

Dato che $v \in V$, esso può essere scritto come combinazione lineare degli elementi di ogni base di V.

Quindi si ha che $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ (ricordiamo che la base di V dell'ipotesi è $\{v_1,...v_k,v_{k+1},....v_n\}$).

L'ultima uguaglianza è vera anche applicando la funzione f a destra e a sinistra. Cioè:

$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right)$, che per la linearità è uguale a $f(v) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(v_j)$.

Avevamo detto che $f(v) = w$, perciò $w = \sum_{j=1}^{n} c_j f(v_j)$.

Spezzando la sommatoria in due, otteniamo $w = \sum_{j=1}^{k} c_j f(v_j) + \sum_{j=k+1}^{n} c_j f(v_j)$, dove la prima sommatoria è combinazione lineare dei vettori $f(v_1),..., f(v_k)$, che avevamo detto essere nulli.

Quindi l'uguaglianza diventa: $w = \sum_{j=k+1}^{n} c_j f(v_j)$, che è la relazione che volevamo.

Quindi $f(v_{k+1}),... f(v_n)$ generano Im f.

2. Mostriamo ora che $f(v_{k+1}), \dots f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Cioè dimostriamo che $\sum_{j=k+1}^{n} c_j f(v_j) = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \dots = c_n = 0$.

Riscriviamo il primo membro dell'implicazione, che per la linearità è $f\left(\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j\right) = 0$.

La sommatoria ~~non è altro che la combinazione lineare di~~ fornisce un vettore *v* di *V*.
Quindi possiamo scrivere, più compattamente, $f(v) = 0$. In particolare, notiamo che $v \in \mathrm{Ker}\, f$.
Appartenendo al nucleo dell'applicazione, *v* può essere scritto anche come combinazione lineare degli elementi della base del nucleo. Ossia $v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$

(ricordiamo che la base di Ker *f* dell'ipotesi è $\{v_1, \dots v_k\}$).

Abbiamo scritto *v* come due combinazioni lineari diverse, e si ha che $\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$.

Se le due sommatorie sono uguali, la loro differenza è nulla: $\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j = 0$.

Le due sommatorie formano a tutti gli effetti una combinazione lineare degli elementi della base di *V*.
Tali elementi, appartenendo a una base, sono linearmente indipendenti e dunque la combinazione dell'ultima uguaglianza rispetta la relazione $\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$.

Abbiamo trovato che $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$, perciò $f(v_{k+1}), \dots f(v_n)$ sono linearmente indipendenti c.v.d.
Il teorema della dimensione è dimostrato.

Osservazioni

- dalla formula del teorema discende che $\dim V \geq \dim(\mathrm{Ker}\, f), \dim(\mathrm{Im}\, f)$
- se $\dim V < \dim W$ si ha che $\dim(\mathrm{Im}\, f) \leq \dim V < \dim W$
  e dunque che $\dim(\mathrm{Im}\, f) < \dim W$, che implica che $\mathrm{Im}\, f \neq W$.
  L'ultima relazione preclude la suriettività dell'applicazione *f*.
- se $\dim V > \dim W$ si ha che $\dim V > \dim W \geq \dim(\mathrm{Im}\, f)$
  e dunque che $\dim V \overset{>}{\cancel{\geq}} \dim(\mathrm{Im}\, f)$. Dal teorema della dimensione risulta dunque che $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ e dunque la sua dimensione non è 0.
  L'ultima conseguenza preclude la iniettività dell'applicazione *f*.
- se $\dim V = \dim W$ si ha che *f* è iniettiva se e solo se è suriettiva.
  Infatti una funzione è iniettiva se e solo se il suo nucleo ha dimensione 0 che implica, per il teorema della dimensione, che $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, f)$. Dato che *f* è iniettiva, si ha che $\dim V = \dim W$ e dunque che $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim W$, cioè $W = \mathrm{Im}\, f$, che è la condizione di suriettività.

Siccome, per motivi che saranno più chiari tra poco, il *rango* $rk(f)$ di un'applicazione lineare *f* (o meglio il rango della matrice associata ad *f*) è definito come la dimensione dell'immagine ($rk(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$), il teorema della dimensione si scrive anche:

$$\underline{\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + rk(f)}$$

UTILIZZI DEL RANGO DI MATRICI

Data una matrice $A_{m \times n}$, si ha che $\boxed{rk(A) = \dim(\mathrm{Span}(v_1 ... v_n))}$

cioè il rango della matrice è dato dalla dimensione del sottospazio vettoriale di $\Re^m$ generato dalle colonne $v_1,...v_n$ di *A*.

<u>Esempio</u>

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, il cui rango è $rk(A) = 2$.

Consideriamo lo spazio generato dalle colonne di *A* $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ con vettori di $\Re^4$.

Esso avrà dimensione 2, secondo la formula presentata sopra. Ciò è confermato dal fatto che una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, che contiene 2 elementi.

(dell'algoritmo sull'estrazione di basi ci occupiamo tra poco).

In modo analogo, il rango di una matrice $A_{m \times n}$ è dato anche da $\boxed{rk(A) = \dim(\mathrm{Span}(v^1 ... v^n))}$

dove stavolta si considerano le righe $v^1,...v^n$ della matrice *A*.

Con un'ulteriore definizione, diciamo che:

<u>il rango di una matrice *A* è uguale al numero massimo di colonne o di righe linearmente indipendenti.</u>

ALTRI UTILIZZI DEL RANGO

Conoscere il rango di una matrice è utile anche per stabilire se un gruppo di vettori genera uno spazio oppure se i vettori sono linearmente indipendenti.

Dati i vettori $v_1,...,v_n \in \Re^m$ e data la matrice $A = ((v_1),...,(v_n))$,

si ha che:

$$\boxed{v_1,...,v_n \ \ generatori \ di \ \Re^m \Leftrightarrow rk(A) = m}$$

$$\boxed{v_1,...,v_n \ \ linearmente \ \ indipendenti \Leftrightarrow rk(A) = n}$$

Queste relazioni sono utili nel determinare se un gruppo di vettori forma una base.

Diremo che: $\{v_1,...,v_n\}$ è base di $\Re^m$ se e soltanto se $\underline{rk(A) = n = m}$,

cioè nel caso di matrici quadrate con determinante diverso da 0 (infatti $rk(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$)

Inoltre: $m > n$ implica che $v_1,...,v_n$ non generano $\Re^m$

$m < n$ implica che $v_1,...,v_n$ non sono linearmente indipendenti.

Algoritmi per estrarre e completare basi
Proponiamo ora due brevi e semplici algoritmi per lavorare sulle basi.

1. Dati $v_1,...,v_n \in \Re^m$ vettori linearmente indipendenti (con $n < m$), si possono completare a una base di $\Re^m$ nel modo seguente:

- si trovi il minore (o i minori) di ordine massimo con determinante diverso da zero della matrice $A = ((v_1),...,(v_n))$, dove $v_1,...,v_n$ sono le colonne di *A*.
- si aggiungano a $v_1,...,v_n$ $m-n$ vettori della base canonica e_j, dove l'indice *j* corrisponde agli indici delle righe di *A* rimaste dopo aver trascurato le righe appartenenti al minore.

<u>Esempio</u>

Consideriamo i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Re^4$. Data la matrice dei vettori $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, troviamo un minore di ordine massimo con determinante non nullo. Prendiamo ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, minore di ordine 2 con determinante pari a -2 e dunque diverso da 0. Il rango di *A* è 2, che è anche il numero di colonne di *A*; tale corrispondenza ci dice che i vettori sono linearmente indipendenti.
Affinché i due vettori vengano completati a una base di $\Re^4$, dobbiamo aggiungerne 2. Dal momento che le righe del minore corrispondono alle righe di *A* di indici 2 e 3, aggiungeremo ai due vettori gli elementi della base canonica con indici pari a 1 e 4 (cioè gli altri).

Quindi, aggiungeremo e_1, e_4: abbiamo trovato che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\Re^4$.

N.B. Tale algoritmo era già stato descritto più rapidamente nell'osservazione seguente il teorema del completamento (*cfr*. sopra).

2. Dati $v_1,...,v_n \in \Re^m$ vettori generatori (con $n > m$); si può estrarre da $v_1,...,v_n$ una base di $\Re^m$ nel modo seguente:

- si trovi il minore (o i minori) di ordine massimo con determinante diverso da zero della matrice $A = ((v_1),...,(v_n))$, dove $v_1,...,v_n$ sono le colonne di *A*.
- si eliminino da *A* le $n-m$ colonne che non contengono gli elementi del minore (o minori) trovato.

<u>Esempio</u> Consideriamo $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \Re^2$ dato che $rk(A) = 2$ come il numero di righe, i vettori sono generatori di $\Re^2$. Per scegliere il vettore da eliminare consideriamo un minore di ordine 2, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, che ha determinante diverso da 0. A questo punto la base è proprio $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Diamo ora una definizione che tornerà utile in molti contesti:

> Il *rango* $rk(f)$ di un'applicazione lineare $f:V \to W$ è la dimensione dell'immagine: $rk(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$

Matrici associate ad applicazioni lineari rispetto a date basi

Abbiamo visto come ad un'applicazione lineare $f:\Re^n \to \Re^m$ sia associata una matrice $A_{m\times n}$ tale che, $\forall v \in \Re^n$, si ha $f(v) = A \cdot v$; e che le colonne di tale matrice sono gli elementi $f(e_j)\ \ \forall\ j = 1 \dots n$

Vediamo ora come associare ad $f:V \to W$ (dove *V* e *W* sono spazi vettoriali su K) una matrice $A_{m\times n}$ rispetto a una base $\mathscr{B}$ di *V* e a una base $\mathscr{C}$ di *W*, tale che $f(v)_{\mathscr{C}} = A \cdot v_{\mathscr{B}}$.

ossia otterremo una *m*-upla di dimensione $m \times 1$.

Indicheremo tale matrice *A* con la notazione ${}_{\mathscr{C}}f_{\mathscr{B}}$, che è la rappresentazione dell'applicazione lineare *f* rispetto alle basi $\mathscr{B}$ del dominio e $\mathscr{C}$ del codominio (notare che i pedici sono scritti nell'ordine opposto a quello che ci si aspetterebbe: prima la base del codominio, poi del dominio).

Abbiamo già detto come utilizzare questa matrice associata nella formula nel riquadro. In effetti non sembra esserci nulla di nuovo rispetto all'analoga relazione già vista precedentemente.

$$\boxed{f(v)_{\mathscr{C}} = {}_{\mathscr{C}}f_{\mathscr{B}} \cdot v_{\mathscr{B}}}$$

Ora vediamo come ottenere la matrice associata, ricostruendola colonna per colonna.

L'analogia con il caso particolare ritorna, quindi verrà naturale cercare le immagini dei vettori e_j.

Per trovare tali immagini, secondo la formula appena proposta, bisognerà fare $A \cdot e_j$, dove però e_j è un vettore della forma $v_{\mathscr{B}}$, cioè espresso rispetto alla base $\mathscr{B}$. Quindi la domanda è: quale vettore *v* dà luogo a tale ~~dovremo sostituire nella formula al posto di~~ $v_{\mathscr{B}}$? Dovrà essere ~~un vettore esprimibile come combinazione lineare degli elementi di $\mathscr{B}$, ossia come~~ $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ ~~. È facilmente comprensibile che tale combinazione è uguale al solo vettore v_i, perché~~ ove i coefficienti $c_1,\dots,c_n$ devono essere tutti nulli fuorché uno per far sì che $v_{\mathscr{B}}$ ~~la sommatoria~~ sia uguale a ~~un vettore del tipo~~ $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, ossia con l'unico elemento non nullo pari a 1 nel posto *j*. Dunque il vettore che ci serve è proprio v_j ~~(scriviamo *j* invece di *i*, tanto è la stessa cosa)~~. Allora la *j*-esima colonna di ${}_{\mathscr{C}}f_{\mathscr{B}}$ sarà proprio $f(v_j)_{\mathscr{C}}$ cioè l'immagine del vettore di $\mathscr{B}$ espresso nella ~~rispetto alla~~ base $\mathscr{C}$ del codominio.

Esempio Dati $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;/\; x+y+z=0\right\}$ e $W=\Re_2[t]$ e sia $f:V\to W \quad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3y+(x-z)t+xt^2$

Siano anche date basi di V e W: $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e $\mathcal{C}=\{1,t,t^2\}$

Determinare la matrice associata ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$. Prima di tutto ricaviamoci le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$.

$f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=-3+t+t^2$ e $f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=3+t$ e riscriviamole rispetto alla base $\mathcal{C}$.

$f(v_1)_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ e $f(v_2)_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, ottenute specializzando le immagini in $\mathcal{C}$.

La matrice associata all'applicazione rispetto alle basi sarà dunque $\begin{pmatrix}-3&3\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Adesso, per calcolare una qualsiasi immagine, basterà moltiplicare tale matrice per il vettore stesso espresso nella base $\mathcal{B}$.

Considerando ad esempio il vettore $v=\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$ e considerando la sua espressione in $\mathcal{B}$ $v_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$,

l'immagine di v sarà: $f\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-3&3\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\3\\5\end{pmatrix}$ ossia il polinomio $-21+3t+5t^2$.

MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE

Vediamo ora un caso particolare di matrice associata

Consideriamo l'applicazione identità $f=\mathrm{id}$ tale che $V\xrightarrow{id}V$ ossia $\forall v\in V \;\; id(v)=v$

Il vettore v viene mandato in se stesso con, eventualmente, una base diversa $\mathcal{B}'$.

Usando la formula $f(v)_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}f_{\mathcal{B}}\cdot v_{\mathcal{B}}$ si determina $id(v)_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}\cdot v_{\mathcal{B}}$

Ma $id(v)=v$ per ogni v, dunque la relazione si può riscrivere come:

$$\boxed{v_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}\cdot v_{\mathcal{B}}}$$

dove ${}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$ è una matrice quadrata (infatti il numero di elementi di $\mathcal{B}$ è uguale al numero di elementi di $\mathcal{B}'$). Tale matrice trasforma le coordinate di v dalla base $\mathcal{B}$ nel vettore espresso nella base $\mathcal{B}'$. Per questo motivo si chiama **matrice di cambiamento di base**.

<u>Esempio</u>

Date le basi $\mathcal{B}=\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}},\underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$ e $\mathcal{B}'=\left\{\underset{v_1'}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}},\underset{v_2'}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$ su $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,/\, x+y+z=0\right\}$

Determinare la matrice quadrata ${}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$ (che sarà di dimensioni 2×2)
Dato che abbiamo detto che la matrice associata sarà costituita dalle immagini degli elementi della base del dominio $\mathcal{B}$ espressi rispetto alla base del codominio $\mathcal{B}'$, ricaviamo le coordinate degli elementi di $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, ossia troviamo $v_{1\,\mathcal{B}'}$ e $v_{2\,\mathcal{B}'}$.

$$v_{1\,\mathcal{B}'}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1=1\\c_2=-1\\-c_1-c_2=0\end{cases}\qquad v_{1\,\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_{2\,\mathcal{B}'}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1=0\\c_2=1\\-c_1-c_2=-1\end{cases}\qquad v_{2\,\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Dato che le immagini di tali vettori ($v_{1\,\mathcal{B}'}$ e $v_{2\,\mathcal{B}'}$) sono i vettori stessi (id(v) = v),

concludiamo che la matrice di cambiamento di base ${}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$ è $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.

Verifichiamolo: consideriamo il vettore $v=\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$ e la sua espressione in $\mathcal{B}$ $v_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

Vogliamo trovare l'espressione di v in $\mathcal{B}'$ a partire da $v_{\mathcal{B}}$

Applichiamo la formula: $v_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

E in effetti $v_{\mathcal{B}'}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1=5\\c_2=-7\\-c_1-c_2=2\end{cases}\qquad v_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

Operazioni tra matrici associate ad applicazioni lineari

Abbiamo visto nel caso delle matrici associate ad applicazioni del tipo $f:\Re^n \to \Re^m$ la compatibilità con le operazioni di somma e prodotto. Per le applicazioni lineari tra spazi vettoriali il discorso è analogo, ma le relazioni con le operazioni avranno a che fare anche con le basi degli spazi stessi, una novità rispetto alle matrici particolari viste precedentemente. Si avranno le seguenti definizioni:

1. Se $f,g:V \to W$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi del dominio e del codominio,
la matrice associata all'applicazione $f+g$ sarà data dalla somma delle matrici associate alle singole applicazioni: ossia la matrice sarà ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} + {}_{\mathcal{C}}g_{\mathcal{B}}$
2. Se $f:V \to W$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi del dominio e del codominio e c è una costante tale che $c \in K$
la matrice associata all'applicazione $c\cdot f$ sarà data da $c\cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$
3. Se $f,g:V \to W$ la matrice associata all'applicazione $f\circ g$ (del tipo $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$)
con rispettive basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sarà data da : ${}_{\mathcal{C}}(f\circ g)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}g_{\mathcal{A}}$

Casi particolari

Data $V \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V$ (cioè $id\circ id$) con basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ si ha che $id\circ id = id$ con "base di partenza" $\mathcal{B}$ e "base di arrivo" $\mathcal{B}$.
Cioè ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'} \cdot {}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$; ma ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}} = I_n$, infatti ogni $v_j = 0\cdot v_1 + \ldots + 1\cdot v_j + \ldots + 0\cdot v_n$
Allora si arriva all'uguaglianza ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'} \cdot {}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}} = I_n$, che ci dice che ${}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}}$, ossia la matrice di cambiamento di base, ha un'inversa pari a ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}$.
Quindi

$$\boxed{\exists \ ({}_{\mathcal{B}'}id_{\mathcal{B}})^{-1} = {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}}$$

Una matrice di cambiamento di base, dunque, è quadrata e invertibile e, in particolare ha determinante non nullo.

2. Adesso vediamo il modo per cambiare la base rispetto a cui è scritta una matrice associata senza conoscere preliminarmente i vettori.
Consideriamo l'applicazione composta $V \xrightarrow{id} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{id} W$ con basi $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$.
L'applicazione corrisponde alla composizione doppia $id_W \circ f \circ id_V$.
La matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}'$e $\mathcal{C}'$ (quelle di partenza e arrivo) sarà:
${}_{\mathcal{C}'}(id_W \circ f \circ id_V)_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}$
Ora, dal momento che l'applicazione è definita da V a W, al di là di quali siano i passi intermedi, il suo effetto è uguale a quello di $f(v)$. Infatti $v \xrightarrow{id} v \xrightarrow{f} f(v) \xrightarrow{id} f(v)$.
Quindi nella formula, l'applicazione composta può essere sostituita dalla più sintetica $f(v)$
Riscrivendo tutto otteniamo:

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}}$$

Ossia abbiamo trovato un modo per cambiare matrice associata a un'applicazione: dalla matrice rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ siamo passati alla matrice rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$.

Osservazioni

1. Se $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, cioè se si cambia base solo in *V*, la ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}'}$ è uguale a:
${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}'}$ ossia, dato che ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{C}} = I_n$, ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}'}$
che corrisponde alla formula già vista per i casi generali.
2. Analogamente, se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, cioè se si cambia base solo in *W*, la ${}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}}$ è uguale a:
${}_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}}$ ossia, dato che ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}} = I_n$, ${}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}'}id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$

Le matrici associate ad applicazioni lineari $f : \Re^n \to \Re^m$ sono *casi particolari* delle matrici associate ad applicazioni lineari con date basi. Infatti la matrice associata a questo tipo di funzioni altro non è se non la matrice associata ad *f* rispetto alla <u>basi canoniche</u> $\mathcal{E}_n$ e $\mathcal{E}_m$.
Infatti le colonne della matrice sono le immagini degli elementi e_j della base canonica $\mathcal{E}_n$ che poi vengono espressi, senza che gli succeda niente (perché la base canonica non altera le coordinate di un vettore), nella base $\mathcal{E}_m$.

Adesso studiamo nel dettaglio un esercizio-tipo di ricerca di una matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica in cui però conviene arrivare a tale base mediante una matrice di cambiamento.
Gli esercizi in questione forniscono come dati dominio e codominio dell'applicazione, e inoltre specificano il nucleo e l'immagine di tale applicazione.

<u>Esercizio</u>
Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \Re^3 \to \Re^4$ con

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Iniziamo verificando che il teorema della dimensione sia rispettato; quindi troviamo una base del nucleo e una base dell'immagine di *f*, gli elementi delle quali ci daranno le rispettive dimensioni.
Abbiamo detto che la dimensione ~~di un insieme di combinazioni lineari~~ di uno spazio vettoriale corrisponde al rango della matrice composta dalle coordinate dei vettori che ~~formano~~ generano tale ~~combinazione~~ spazio. Dunque

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = rk\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \dim(\operatorname{Im} f) = rk\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \dim(\operatorname{Ker} f) = 1 \ \text{e} \ \dim(\operatorname{Im} f) = 2$$

Per il teorema della dimensione deve essere vero che $\dim(\Re^3) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) \quad 3 = 3$.
Ora possiamo iniziare a svolgere l'esercizio:
Si richiede che la matrice associata ad *f* sia rispetto alla base canonica, però non è conveniente impostarla subito rispetto a tale base perché ciò comporterebbe una matrice 4×3 con 12 elementi incogniti. Si rileva più veloce e meno faticoso lo studio della matrice associata ad *f* rispetto a basi non canoniche scelte a partire dai dati forniti dall'esercizio. Tali basi saranno le basi di $\Re^3$ e di $\Re^4$ ottenute estendendo le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

Quindi, prima di tutto, troviamo delle basi di Ker f e di Im f.

Il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ costituisce già una base di Ker *f*, perché rispetta le dimensioni ed è anche linearmente indipendente;

I vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ invece sono troppi (la dimensione dell'immagine è 2), dunque dobbiamo estrarne una base. Prendiamo un minore di ordine 2 con determinante non nullo e conserviamo i vettori che contengono elementi del minore stesso. Scegliendo ad esempio il minore $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, con colonne prese dal primo e dal terzo vettore, la base di Im f risulta: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Ora che abbiamo le basi di nucleo e immagine, possiamo estenderle rispettivamente a basi del dominio $\Re^3$ e del codominio $\Re^4$.

Alla base $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ aggiungiamo 2 elementi della base canonica; ad esempio e_1, e_3:

la base di $\Re^3$ così determinata è $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$;

alla base di Im f aggiungiamo 2 elementi della base canonica; scegliendo lo stesso minore di prima, ad esempio, aggiungiamo gli elementi e_1, e_4 : la base è $\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Iniziamo già a sapere qualcosa sulla matrice associata che cerchiamo: la matrice ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ deve avere come colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{C}$. In particolare, se consideriamo la prima colonna $f(v_1)_{\mathcal{C}}$ ossia $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$, ci accorgiamo che, dal momento che $v_1 \in \text{Ker } f$, la sua immagine sarà sempre e comunque il vettore nullo, qualsiasi sia la base rispetto a cui viene espresso.

Allora possiamo già essere sicuri che la prima colonna della matrice associata (che ricordiamo sarà di dimensioni 4×3) è costituita da tutti zero.

Concentriamoci ora sugli altri vettori di $\mathcal{B}$: l'immagine di v_2 può essere scritta come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{C}$ perché, per definizione, $f(v_2) \in \Re^4$.
Dunque possiamo scrivere $f(v_2) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4$, dove w_1, w_2, w_3, w_4 sono gli elementi di $\mathcal{C}$. D'altro canto, è vero sicuramente che $f(v_2) \in \operatorname{Im} f$, per definizione di immagine, e dunque $f(v_2)$ può essere scritto anche come combinazione lineare degli elementi della base di Im *f* :
$f(v_2) = d_1 w_1 + d_2 w_2$ (infatti w_1, w_2 sono gli elementi della base di Im *f*).
Abbiamo così scritto $f(v_2)$ in due modi diversi:
$f(v_2) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 = d_1 w_1 + d_2 w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4$
Questa uguaglianza ci dice che $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$
Abbiamo trovato altri due elementi della matrice ${}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}}$, ossia gli ultimi due elementi della seconda colonna.
Ripetendo lo stesso ragionamento per il vettore di $\mathcal{B}$ v_3 si arriva a conclusioni analoghe. Dunque anche gli ultimi due elementi della terza colonna della matrice associata sono nulli.

Fin ora la nostra matrice ${}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}}$ è così: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; mancano i quattro elementi in alto a destra.

Abbiamo detto che il rango della matrice associata è per definizione la dimensione dell'immagine dell'applicazione stessa. Noi sappiamo, perché l'abbiamo già calcolata, che $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.
Dunque anche *rk* (${}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}}$) = 2.
Se la matrice ha rango pari a 2, vuol dire che esiste un minore della matrice di ordine 2 con determinante diverso da zero. Ma allora al posto del minore in alto a destra (cioè la sottomatrice 2×2) è possibile inserire quattro elementi a piacere, purché formino un minore con determinante non nullo.
Ossia deve essere $\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \neq 0$.
Se possiamo mettere quattro numeri a piacere, conviene scegliere il minore più semplice, ossia quello formato da tutti 1 sulla diagonale e tutti zero altrove. Cioè il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Abbiamo finalmente trovato la matrice associata ad *f* rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

${}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma l'esercizio chiedeva la matrice rispetto alle basi canoniche. Chiedeva cioè

${}_{\mathcal{E}_4} f_{\mathcal{E}_3}$, la matrice rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_3$ del dominio e $\mathcal{E}_4$ del codominio.

Procediamo dunque ad utilizzare la matrice di cambiamento di base. Dalla formula vista prima:
${}_{\mathcal{E}_4} f_{\mathcal{E}_3} = {}_{\mathcal{E}_4} id_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}} id_{\mathcal{E}_3}$; dobbiamo trovare ${}_{\mathcal{E}_4} id_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{B}} id_{\mathcal{E}_3}$.

Per il calcolo di ${}_{\mathcal{E}_4} id_{\mathcal{C}}$ non c'è molto da fare: equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè ~~le immagini dei vettori di ℬ (ossia~~ gli elementi di $\mathcal{C}$~~)~~ che espressi rispetto ad una base canonica rimangono se stessi.

Per quanto riguarda ${}_{\mathcal{B}} id_{\mathcal{E}_3}$ la strategia migliore è quella di trovare ${}_{\mathcal{E}_3} id_{\cancel{\mathcal{C}}\,\mathcal{B}}$ e poi calcolarne l'inversa.

Ossia bisogna calcolare l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Senza riportare qui i calcoli, si trova che

$$\left({}_{\mathcal{E}_3} id_{\cancel{\mathcal{C}}\,\mathcal{B}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cancel{1}\,3}{2} & 1 \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}} id_{\mathcal{E}_3} .$$

A questo punto applichiamo la formula:

$${}_{\mathcal{E}_4} f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cancel{1}\,3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\cancel{1}\,2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\cancel{1}\,2 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo finito.

Osservazioni
Le condizioni emerse dal calcolo della matrice associata ad un'applicazione lineare di cui si conosca dominio, codominio, nucleo e immagine, sono valide in tutti i casi:
nullità delle prime colonne e delle ultime righe della matrice rispetto alle basi di dominio e codominio e determinante del minore in alto a destra diverso da zero.

In particolare, la matrice associata alle basi del dominio e del codominio ha un numero di colonne nulle pari a $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ e un numero di righe nulle (in basso) pari alla *codimensione* dell'immagine, ossia $\dim(W) - \dim(\mathrm{Im}\, f)$. In alto a destra, c'è inoltre una matrice quadrata *non singolare*, ossia con determinante non nullo.

SOTTOSPAZI AFFINI di $\Re^n$

Abbiamo parlato di sottospazi vettoriali, cioè tutti i sottoinsiemi di spazi vettoriali chiusi rispetto alla somma e al prodotto per scalare e, in particolare, contenenti il vettore nullo. Definendoli così, abbiamo per esempio visto che i sottospazi vettoriali di $\Re^3$ sono: $\Re^3$ stesso (dimensione 3), tutti i piani passanti contenenti lo $\underline{0}$ (dimensione 2), tutte le rette contenenti lo $\underline{0}$ (dimensione 1) e l'insieme costituito dal solo $\underline{0}$ (dimensione 0).

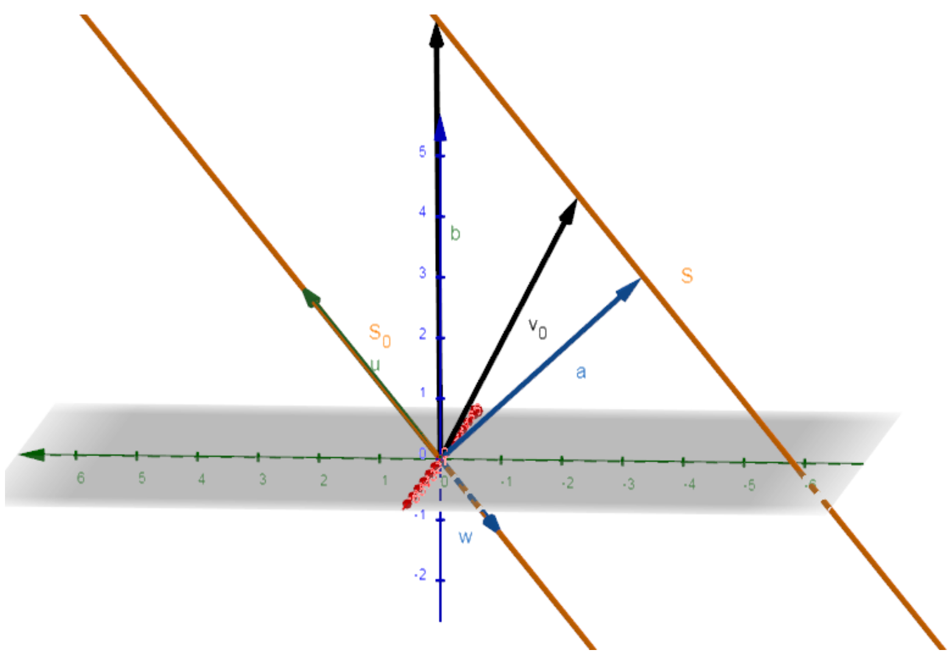
~~Quando si parla di *sottospazi affini*, ci si riferisce invece a tutti i sottoinsiemi di *spazi affini*, dove per "affinità" si intende, oltre alla somiglianza con i "parenti" spazi vettoriali, la caratteristica di non avere tra i suoi punti uno privilegiato, quale era l'origine (cioè lo $\underline{0}$) nei sottospazi vettoriali. Dunque, a~~ A differenza dei sottospazi vettoriali, i sottospazi affini possono non intersecarsi ed essere ad esempio paralleli. ~~Questa maggiore libertà, come vedremo, ha però una controparte: per i sottospazi affini non vale per esempio la formula di Grassmann.~~

Detto questo, possiamo dire quali sono i sottospazi affini di $\Re^3$: sono $\Re^3$ stesso, tutti i piani (e non solo quelli passanti per l'origine), tutte le rette e tutti i punti.
Diamo una definizione di sottospazio affine più formale, partendo dal concetto di sottospazio vettoriale: dato un insieme *S*,

$S \subseteq \Re^n$ *è sottospazio affine di* $\Re^n$ *se* è vuoto o $\exists$ *un sottospazio vettoriale* S_0 *di* $\Re^n$ *e* $\exists\, v_0 \in \Re^n$ /

$$S = v_0 + S_0$$

dove $v_0 + S_0$ è la somma tra un punto è un sottospazio vettoriale $v_0 + S_0 = \{v_0 + v,\ v \in S_0\}$.
Tale somma corrisponde alla *traslazione* del sottospazio S_0 di un vettore v_0.



Nella figura S_0 è una retta passante per l'origine degli assi dello spazio $\Re^3$, v_0 è un vettore qualsiasi di $\Re^3$. *S* è la retta parallela a S_0 passante per il punto definito dal vettore v_0.
Si nota che qualsiasi vettore giacente su S_0 si scelga (nella figura *u* e *w*), le somme $u + v_0$ e $w + v_0$ sono vettori giacenti su *S* (nella figura i due vettori somma *a* e *b*).

S_0 si dice sottospazio vettoriale associato al sottospazio affine S. Ha la caratteristica di essere <u>univocamente determinato</u> da S. Infatti, come già detto, i due spazi (nella figura) sono in relazione di parallelismo ($S \,//\, S_0$). Non a caso la *geometria affine* si occupa delle posizioni reciproche di rette e piani ~~(e triangoli, pentagoni…)~~ nello spazio $\Re^3$ e nel piano $\Re^2$.
Il vettore v_0 invece non è unico: si vede bene dalla figura che qualsiasi punto di S costituisce un vettore adeguato.
Equivalentemente a quanto appena detto, si può dire che S è sottospazio affine di $\Re^n$ se $S - v_0$ è sottospazio vettoriale di $\Re^n$, con $v_0 \in S$.

Ai sottospazi affini così definiti va inoltre aggiunto il vuoto Ø anche se non rientra nella definizione data. Il vuoto non è sottospazio vettoriale (perché non contiene lo 0).

La dimensione di un sottospazio affine $\neq$ Ø si pone uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale associato. $\dim S = \dim S_0$.

Sia dato un sottospazio vettoriale S_0. Se una sua base è $\{v_1,\dots,v_k\}$ e quindi $S_0 = \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_k)$, e se il sottospazio affine associato è $S = v_0 + S_0$, sarà $S = v_0 + \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_k)$,

ovvero $S = \left\{ v_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \mid c_1,\dots,c_k \in \Re \right\}$

Vediamo un esempio di sottospazio affine:

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \ x + y = 1 \right\}$; S non è un sottospazio vettoriale, perché il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non vi appartiene.

È però un sottospazio affine. Infatti esiste un vettore che trasla S a sottospazio vettoriale.

Infatti $S_0 = S - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verifichiamo che sia vero che S_0 così determinato è sottospazio vettoriale.

$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \ x + y = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} / \ x + y = 1 \right\}$$

Si ha che $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ appartiene a un sottospazio vettoriale se $x - 1 + y = 0$, che è vero perché $x + y = 1$

Possiamo anche esprimere S rispetto a una base di S_0: prendiamo ad esempio la base di S_0 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Allora S è esprimibile come $S = \overset{\binom{1}{0}}{\cancel{S_0}} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

SISTEMI LINEARI

Un sistema lineare è un sistema di *equazioni lineari*, ~~ossia un sistema~~ costituito da equazioni in più incognite dove ogni incognita compare con esponente 1. Vediamo come trattare questo tipo di argomento, che è alla base di molti concetti dell'algebra lineare.
Abbiamo già accennato che un sistema lineare può essere espresso nella forma compatta $Ax = b$, dove *A* è la matrice $m \times n$ dei coefficienti, $b \in \Re^{m}$ è il vettore dei termini noti, e $x \in \Re^n$ è il vettore delle incognite.

Esistono altri modi per esprimere un sistema lineare.
Ad esempio, il vettore *b* può essere scritto come combinazione lineare di *x* e delle colonne *v* di *A*:

se v_j è la *j*-esima colonna di *A*, $\quad b = \sum_{j=1}^{n} \cancel{v_j}\, x_j \; v_j$

Oppure, se scriviamo per esteso i tre elementi *A*, *x*, *b*: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

il sistema può essere espresso nella forma tipica: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

La matrice *A* è detta *matrice incompleta* del sistema
La *matrice completa* è la matrice $(A \mid b)$ ottenuta giustapponendo la matrice *A* al vettore *b*. Ossia la matrice del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, di dimensioni $m \times (n+1)$

Tutti i vettori *x* che rendono vera l'uguaglianza $Ax = b$ (dove *A* e *x* sono due matrici $m \times n$ e $n \times 1$ moltiplicate tramite prodotto righe per colonne) costituiscono le soluzioni di un sistema lineare.
Tali soluzioni formano un insieme definito nel seguente modo:

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{x \in \Re^n \;:\; Ax = b\}$$

SISTEMI OMOGENEI

Dato un sistema lineare $Ax = b$, si dice *sistema omogeneo associato* il sistema $Ax = 0$, ossia il sistema che ha per vettore colonna dei termini noti il vettore nullo.
Si parla di sistemi omogenei associati perché vale la seguente relazione:

Dato $Ax = b$, $\mathrm{Sol}(A, b)$ è un sottospazio affine di $\Re^n$ e, se ha soluzioni, è il sottospazio associato al sottospazio vettoriale $\mathrm{Sol}(A, 0)$ (cioè l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = 0$).

Dimostriamo quanto appena detto: cioè dimostriamo che
a) $\mathrm{Sol}(A, 0)$ è un sottospazio vettoriale di $\Re^n$
b) $\mathrm{Sol}(A, 0)$ è il sottospazio vettoriale associato al sottospazio affine $\mathrm{Sol}(A, b)$

Dimostrazione 1
$\mathrm{Sol}(A,0)=\{x\in\Re^n : Ax=0\}$ è un sottospazio vettoriale se verifica le solite tre condizioni:
I. $\underline{0}\in\mathrm{Sol}(A,0)$: sostituendo il vettore nullo nella definizione di $\mathrm{Sol}(A,0)$, otteniamo: $A\cdot 0=0$, che è verificato.
II. $x_1,x_2\in\mathrm{Sol}(A,0)\Rightarrow x_1+x_2\in\mathrm{Sol}(A,0)$. Come prima, sostituiamo il vettore x_1+x_2 nella definizione e otteniamo: $A\cdot(x_1+x_2)=0$ ossia $Ax_1+Ax_2=0$.
x_1 , x_2 $\in\mathrm{Sol}(A,0)$ per ipotesi, dunque è vero che $Ax_1=0$ e $Ax_2=0$; sostituendo le due espressioni nell'uguaglianza $Ax_1+Ax_2=0$ si verifica la condizione.
III. $x\in\mathrm{Sol}(A,0)$, $c\in\Re\Rightarrow c\cdot x\in\mathrm{Sol}(A,0)$
Come prima, sostituiamo il vettore cx nella definizione: $A\cdot(cx)=0$; i termini c ed *A* commutano e si ottiene l'uguaglianza $c\cdot Ax=0$; dato che $x\in\mathrm{Sol}(A,0)$ per ipotesi, è vero che $Ax=0$.
Dunque anche $c\cdot Ax=0$ è verificata.

Poiché $\mathrm{Sol}(A,0)$ è additivo ed omogeneo, è un sottospazio vettoriale.

È possibile dimostrare che $\mathrm{Sol}(A,0)$ è un sottospazio vettoriale anche in un altro modo: consideriamo l'applicazione lineare $f:\Re^n\to\Re^m$ associata alla matrice *A*. Per la definizione di matrice associata, si ha $\forall v\in\Re^n$ $f(v)=A\cdot v$. Ma $A\cdot v=0$ per definizione di $\mathrm{Sol}(A,0)$; dunque $f(v)=0$. I vettori *v* che rispettano quest'ultima relazione sono gli elementi del nucleo di *f*, cioè $\mathrm{Ker}\, f=\{v\in\Re^n : f(v)=0\}$. Allora abbiamo trovato che $\mathrm{Sol}(A,0)$ è il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice *A*. Abbiamo già dimostrato che Ker *f* è un sottospazio vettoriale, dunque possiamo concludere che lo è anche $\mathrm{Sol}(A,0)$.

Dimostrazione 2.
Dimostriamo ora che $\mathrm{Sol}(A,b)$ è il sottospazio affine associato ad $\mathrm{Sol}(A,0)$.
Cioè dimostriamo che per $x_0\in\mathrm{Sol}(A,b)$ si ha che $\mathrm{Sol}(A,0)+x_0=\mathrm{Sol}(A,b)$.
Dobbiamo dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi, il che equivale a dimostrare l'inclusione del primo nel secondo e viceversa.
I. Dimostriamo prima che $\mathrm{Sol}(A,0)+x_0\subseteq\mathrm{Sol}(A,b)$
Vediamo se ogni $x\in\mathrm{Sol}(A,0)$ verifica la relazione $x+x_0\in\mathrm{Sol}(A,b)$.
Per definizione di $\mathrm{Sol}(A,b)$, possiamo sostituire il vettore $x+x_0$ nella formula $Ax=b$.
Otteniamo: $A\cdot(x+x_0)=b$, ossia $Ax+Ax_0=b$. È vero che $Ax=0$, perché per ipotesi $x\in\mathrm{Sol}(A,0)$.
Ed è anche vero che $Ax_0=b$, perché $x_0\in\mathrm{Sol}(A,b)$. Dunque $0+b=b$.
II. Dimostriamo $\mathrm{Sol}(A,b)\subseteq\mathrm{Sol}(A,0)+x_0$
Riscriviamo la relazione come $\mathrm{Sol}(A,b)-x_0\subseteq\mathrm{Sol}(A,0)$ e verifichiamo che $\forall x\in\mathrm{Sol}(A,b)$, si ha $x-x_0\in\mathrm{Sol}(A,0)$. Sostituiamo il vettore $x-x_0$ nella definizione: $A\cdot(x-x_0)=0$ ossia $Ax-Ax_0=0$. È vero che $Ax=b$, perché per ipotesi $x\in\mathrm{Sol}(A,b)$ ed è vero che $Ax_0=b$ perché per ipotesi $x_0\in\mathrm{Sol}(A,b)$. Sostituendo otteniamo $Ax-Ax_0=b-b$ e quindi $Ax-Ax_0=0$ come volevamo.
Abbiamo dimostrato che $\mathrm{Sol}(A,b)$ è il sottospazio affine associato ad $\mathrm{Sol}(A,0)$

N.B. Se $Ax = b$ non ha soluzioni, allora non è utile (anzi spesso è fuorviante) considerare il sistema omogeneo associato $Ax = 0$. Infatti se $\mathrm{Sol}(A,b) = \varnothing$, non è vero che anche $\mathrm{Sol}(A,0) = \varnothing$. Infatti quest'ultimo, essendo un sottospazio vettoriale, contiene almeno il vettore nullo.
Dunque prima di lavorare sul sistema omogeneo associato a un sistema lineare, è bene sincerarsi che tale sistema abbia soluzioni.
Se $Ax = b$ ha soluzioni, le dimostrazioni appena fatte ci assicurano che

$\boxed{\mathrm{Sol}(A,b) = \mathrm{Sol}(A,0) + x_0}$, dove x_0 è detta *soluzione particolare* del sistema $Ax = b$.

Quindi ogni soluzione del sistema omogeneo associato è uguale alle soluzioni del sistema $Ax = b$ meno una soluzione fissa x_0.
Capiteranno dei casi in cui sarà più conveniente trovare una specifica soluzione per prima cosa, e poi combinarla con le soluzione del sistema omogeneo. Ad esempio nella risoluzione delle equazioni differenziali.

Se $\{v_1,...,v_k\}$ è una base di $\mathrm{Sol}(A,0)$, allora:

$$\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ x_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \mid c_1,...,c_k \in \Re \right\}$$

Vediamo un paio di esempi di sistemi lineari.
È dato il sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - z = 0 \end{cases}$; troviamo la matrice associata e i vettori delle incognite e dei termini noti. La matrice A sarà formata dai coefficienti delle incognite, dunque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

il vettore b sarà formato dai termini noti $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, e il vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ conterrà le tre incognite.

Proviamo ora a trovare le soluzioni del sistema: la seconda equazione ci dice che $x = z$; se usiamo questa informazione nella prima equazione troviamo che $2x + y = 3$ ossia $y = 3 - 2x$.

La soluzione non è unica, ma $\mathrm{Sol}(A,b)$ è formato da tutti i vettori del tipo $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3-2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \Re \right\}$.

Il sistema omogeneo associato, ossia $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ha soluzioni $\mathrm{Sol}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \Re \right\}$,cioè i vettori dati dal prodotto $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che sono tutte le combinazioni lineari del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi $\mathrm{Sol}(A,0) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \Re \right\}$, dove $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione particolare di $Ax = b$

Il teorema della dimensione fornisce una formula semplice e immediata per trovare la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$.
Infatti, considerando l'applicazione lineare $f : \Re^n \to \Re^m$ associata alla matrice *A* del sistema, il teorema della dimensione ci dice che: $\dim \Re^n = \dim(\text{Ker } f) + rk(A)$.
Abbiamo già dimostrato che il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice del sistema altro non è se non lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo: $\text{Ker } f = \text{Sol}(A,0)$.
Quindi la relazione diventa: $n = \dim(\text{Sol}(A,0)) + rk(A)$; da cui si ricava:

$$\boxed{\dim(\text{Sol}(A,b)) = n - rk(A)}$$

perché $\dim(\text{Sol}(A,0)) = \dim(\text{Sol}(A,b))$, in quanto l'uno è il sottospazio vettoriale associato dell'altro

---

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

$$\boxed{\text{Un sistema } Ax = b \text{ ha soluzione se e solo se } rk(A) = rk(A \mid b)}$$

Per dimostrare il teorema, risulta più comodo riscriverlo in un'altra forma. Se un sistema $Ax = b$ ha soluzione, significa che esistono uno o più valori del vettore *x* tali che $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = b$, con $v_1,\dots,v_n$ vettori colonna della matrice *A*.
Abbiamo già detto che il rango di una matrice equivale alla dimensione dello spazio generato dai vettori colonna (o dai vettori riga) della matrice stessa. Nel teorema le matrici chiamate in causa sono $A = ((v_1),\dots,(v_n))$ e $(A \mid b) = ((v_1),\dots,(v_n),b)$ di dimensioni $m \times n$ e $m \times (n+1)$.
Allora il teorema si può riscrivere nel seguente modo:

$$\exists \ x_1,\dots,x_n : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = b \iff \dim(\text{Span}(v_1,\dots,v_n)) = \dim(\text{Span}(v_1,\dots,v_n,b))$$

Osservazione: $\text{Span}(v_1,\dots,v_n) \subseteq \text{Span}(v_1,\dots,v_n,b)$.

Infatti ogni elemento $v \in \text{Span}(v_1,\dots,v_n)$ può essere scritto come $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ a cui può benissimo venire aggiunto un ulteriore addendo $0 \cdot b$. A questo punto $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j + 0 \cdot b$ è l'espressione di un vettore appartenente a $\text{Span}(v_1,\dots,v_n)$ come combinazione lineare degli elementi di $\text{Span}(v_1,\dots,v_n,b)$. Dunque la proposizione è verificata.
<u>Dimostriamo</u> l'enunciato di Rouché-Capelli in entrambi i versi dell'implicazione.

I. $\exists \ x_1,\dots,x_n : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = b \Rightarrow \dim(\text{Span}(v_1,\dots,v_n)) = \dim(\text{Span}(v_1,\dots,v_n,b))$

Per dimostrare che due sottospazi vettoriali hanno stessa dimensione, ~~dobbiamo~~ possiamo dimostrare che sono uguali. Nel nostro caso, ciò equivale a dimostrare che $\text{Span}(v_1,\dots,v_n) \supseteq \text{Span}(v_1,\dots,v_n,b)$, in quanto abbiamo già osservato il primo insieme è incluso nell'altro. Un elemento $\left[v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j + (c_{n+1}) \cdot b \right] \in \text{Span}(v_1,..,v_n,b)$ deve essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1,..,v_n$. Dato che $b = \sum_{j=!}^{n} x_j v_j$ per ipotesi, la somma $\sum_{j=1}^{n} c_j v_j + (c_{n+1}) \cdot \sum_{j=!}^{n} x_j v_j$ è proprio una combinazione lineare dei soli $v_1,..,v_n$ (infatti *b* non compare).

II. $\dim(\mathrm{Span}(v_1,..,v_n)) = \dim(\mathrm{Span}(v_1,..,v_n,b)) \Rightarrow \exists\ x_1,...,x_n : b = \sum_{j=!}^{n} x_j v_j$

Se prima dovevamo dimostrarlo, adesso possiamo partire con la consapevolezza che

$(\mathrm{Span}(v_1,..,v_n)) = (\mathrm{Span}(v_1,..,v_n,b))$, perché hanno stessa dimensione per ipotesi. e perché il primo spazio è contenuto nel secondo.
Resta da dimostrare che questa uguaglianza implica l'esistenza di soluzioni per il sistema $Ax = b$.
Sappiamo che $b \in \mathrm{Span}(v_1,...,v_n,b)$ perché tra le combinazioni lineari di certi vettori ci sono sempre i vettori stessi. Infatti, *b* può essere scritto come $b = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j + 1b$.

Allora è vero anche che $b \in \mathrm{Span}(v_1,...,v_n)$, in quanto i due spazi sono uguali per ipotesi.

Dunque *b* può essere scritto come $b = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, che è quanto volevamo dimostrare.

TEOREMA DI CRAMER

Sia $Ax = b$ un <u>sistema quadrato di ordine *n* con *A* non singolare</u>. Allora il sistema ammette un'unica soluzione $x = (x_1,...,x_n) \in \Re^n$, che è data da
$\forall\ i = 1,....,n$

$$\boxed{x_i = \frac{\det B_i}{\det A}}$$

dove B_i è la matrice ottenuta sostituendo alla colonna *i*-esima di *A* la colonna *b* dei termini noti, cioè
$B_i = (A_1 ... A_{i-1}\ b\ A_{i+1} .... A_n)$
Affinché il teorema di Cramer possa essere applicato, è necessario che le condizioni sottolineate nell'enunciato siano verificate. Cioè la matrice *A* del sistema lineare deve essere quadrata e deve avere determinante non nullo.

<u>Dimostrazione</u>
Verifichiamo innanzitutto che se una matrice *A* di un sistema è quadrata e non singolare allora il sistema $Ax = b$ ammette una e una sola soluzione.
Che esista *almeno* una soluzione ce lo dice il teorema di Rouché-Capelli; cioè deve essere che $rk(A) = rk(A|b)$. Il rango di $A_{n\times n}$, che è quadrata e non singolare, è sicuramente pari a *n*.
Il rango di $(A|b)_{n\times(n+1)}$ sicuramente non è $n+1$, perché il rango di una matrice è sempre minore o uguale a $\min(m,n)$, con *m* ed *n* ~~indici~~ numeri di rig~~a~~he e di colonn~~a~~e. Quindi il rango di $(A|b)$ deve necessariamente essere *n*. La dimensione $\dim(\mathrm{Sol}(A,b))$ è data da $n - rk(A)$, che in questo caso è pari a 0 perché abbiamo detto che $n = rk(A)$. Allora $\mathrm{Sol}(A,b)$ è uno spazio di dimensione 0, ossia un punto. Se l'insieme delle soluzioni è rappresentato da un punto, la soluzione è unica.

Consideriamo ora la matrice E_i, ossia la matrice ottenuta sostituendo nella matrice I_n alla colonna *i*-esima il vettore *x*, cioè $E_i = (e_1 ... e_{i-1}\ x\ e_{i+1} .... e_n)$. Allora si ha $Ax = b$ se e solo se $AE_i = B_i$ per ogni $i = 1,...,n$. Prendendo il determinante di entrambi i membri e applicando il teorema di Binet troviamo che $\det B_i = \det(AE_i)$ ossia $\det B_i = \det A \cdot \det E_i$. Ma $\det E_i = x$ come è facilmente verificabile sviluppando il determinante lungo la *i*-esima riga. Dunque $\det B_i = \det A \cdot x_i$,

cioè $x_i = \dfrac{\det B_i}{\det A}$, come volevamo.

Vediamo un esempio di risoluzione di un sistema lineare.

Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ applicando il teorema di Cramer.

La matrice incompleta è $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, mentre quella completa è $(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Troviamo che $\det A = 4$. Ora calcoliamo i determinanti delle matrici ottenute sostituendo il vettore *b* una volta alla prima colonna, una volta alla seconda colonna di *A*.

Ossia troviamo il determinante di $B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e di $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il primo determinante è pari a 4, il secondo a -8. A questo punto, applicando Cramer, troviamo:

$x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} = \dfrac{4}{4} = 1$ e $x_2 = \dfrac{\det B_2}{\det A} = \dfrac{-8}{4} = -2$. Le soluzioni sono $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Esiste anche un altro metodo per risolvere sistemi quadrati. Anche questo prevede che siano rispettate le condizioni del teorema di Cramer, quindi prevede matrici quadrate non singolari.

Dato un sistema $Ax = b$, moltiplichiamo entrambi i membri per la matrice inversa A^{-1} :

$A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b$, che è un modo per isolare il vettore *x* a sinistra dell'uguale. Infatti otteniamo $x = A^{-1} \cdot b$.

Applichiamo la formula nell'esempio di sopra:

L'inversa di $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dalla formula otteniamo

$x = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, che è lo stesso risultato di prima.

METODO RISOLUTIVO DI SISTEMI LINEARI

Ora proponiamo un algoritmo che consente di risolvere sistemi lineari rettangolari del tipo $Ax = b$ nel caso in cui $rk(A) = rk(A\,|\,b) \overset{\leq}{<} n$, dove *n* è il numero di colonne della matrice *A* e anche il numero di incognite del sistema.

Prima di cominciare è bene verificare il teorema di Rouché-Capelli. Se non è verificato, allora si può dire subito che $\mathrm{Sol}(A,b) = \varnothing$. Se invece è verificato, si procede al passo 1 dell'algoritmo.

1. Si scelga un minore non singolare della matrice *A* di ordine pari a $rk(A)$. La scelta delminore è arbitraria, ma conviene sempre scegliere il minore che contiene il maggior numero di zeri.
2. Si eliminino le righe della matrice *A* che non contengono elementi del minore scelto. Si eliminino equivalentemente le corrispondenti equazioni del sistema lineare.
   NB: può capitare, nel caso specifico in cui $rk(A) = m$ (ossia il rango di *A* è pari al numero di equazioni del sistema), che non si debba cancellare alcuna riga di *A* e alcuna equazione di $Ax = b$
3. Nel sistema, si portino a secondo membro in ogni equazione i termini che non passano per il minore scelto. Tali termini saranno da considerarsi dei *parametri*, ossia delle variabili che potranno assumere qualsiasi valore per cui il sistema sia risolto. Le incognite rimaste a primo membro verranno espresse, nella soluzione, in funzione dei parametri.
4. Al sistema quadrato ottenuto si applichi un metodo di risoluzione (ad esempio Cramer).

Esempio 1

Troviamo le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ x-z=0 \\ 2x+y+w=3 \end{cases}$.

Si verifica facilmente che il sistema ha soluzione : $rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$.

Possiamo anche trovare subito la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema: infatti il teorema della dimensione ci dice che $\dim(\mathrm{Sol}(A,b)) = n - rk(A) = 4-2=2$

Iniziamo l'algoritmo: scegliamo un minore di ordine 2 con determinante non nullo della matrice *A*.

Possiamo prendere ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che contiene due elementi nulli.

L'unica riga di *A* che non contiene elementi del minore scelto è la prima: dunque la eliminiamo della matrice e, inoltre, eliminiamo la prima equazione dal sistema, che quindi diventa

$\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y+w=3 \end{cases}$.

Questa eliminazione è giustificata dal fatto che la prima equazione non fornisce informazioni ulteriori rispetto alle altre due. Si nota infatti che è una combinazione lineare della seconda e terza equazione (in particolare la prima equazione è uguale alla differenza tra la terza e la seconda equazione).

Adesso portiamo a secondo membro le incognite corrispondenti alle colonne di *A* che non passano per il minore scelto. Nel nostro caso tali colonne sono la prima e la quarta e quindi le incognite corrispondenti sono *x* e *w*. Portando queste incognite a secondo membro nel sistema si ottiene:

$\begin{cases} -z=-x \\ y=3-2x-w \end{cases}$, ossia un sistema $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 3-2x-w \end{pmatrix}$.

Adesso che la matrice associata al sistema è quadrata (e non a caso corrisponde al minore che avevamo scelto) possiamo trovare la soluzione più facilmente.

In questo caso, d'altronde, la soluzione è già a portata di mano, senza effettuare alcun calcolo.

Infatti troviamo che $z=x$ e $y=3-2x-w$.

Allora le soluzioni del sistema sono : $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3-2x-w \\ x \\ w \end{pmatrix},\ x, \overset{w}{\cancel{y}} \in \Re \right\}$ valide per ogni *x* e *w* reali.

Volendo possiamo anche scrivere le soluzioni di $Ax=b$ come somma delle soluzioni di $Ax=0$ e di una soluzione particolare di $Ax=b$.

Ossia $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, cioè come $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$.

Ancora. Abbiamo trovato anche una base di $\mathrm{Sol}(A,0)$, cioè $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, dal momento che i suoi elementi sono 2, come ci ha detto il th. della dimensione, e sono anche linearmente indipendenti.

<u>Esempio 2</u>

Troviamo lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases}2x+y-z-w=3\\3x-y-z=8\\x-z+w=4\end{cases}$.

Verifichiamo che il sistema abbia soluzione : $rk\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\3&-1&-1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}=rk\begin{pmatrix}2&1&-1&-1&3\\3&-1&-1&0&8\\1&0&-1&1&4\end{pmatrix}=3\cdot$

Scegliamo come minore non singolare di ordine 3 ad esempio $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Dal momento che $rk(A)=m$, il passo 2 dell'algoritmo non va effettuato. Infatti tutte le righe di A contengono elementi del minore.
Portiamo a secondo membro nel sistema l'incognita x, la cui colonna corrispondente non passa per il minore: $\begin{cases}y-z-w=3-2x\\-y-z=8-3x\\-z+w=4-x\end{cases}$. Ora abbiamo un sistema $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2x\\8-3x\\4-x\end{pmatrix}$.

Poiché $\det\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=-3\neq 0$, possiamo applicare ad esempio il metodo di Cramer.

Troviamo i determinanti delle matrici B_1, B_2, B_3 ottenute mediante le sostituzioni descritte per il teorema di Cramer:

$\det B_1=\det\begin{pmatrix}3-2x&-1&-1\\8-3x&-1&0\\4-x&-1&1\end{pmatrix}=-3x+9$, $\det B_2=\det\begin{pmatrix}1&3-2x&-1\\-1&8-3x&0\\0&4-x&1\end{pmatrix}=-6x+15$ e

$\det B_3=\det\begin{pmatrix}1&-1&3-2x\\-1&-1&8-3x\\0&-1&4-x\end{pmatrix}=-3x+3\cdot$

Dividiamo ora i tre determinanti per $\det A$ e otteniamo le soluzioni del sistema in forma parametrica:

$y=\dfrac{-3x+9}{-3}=x-3$, $z=\dfrac{-6x+15}{-3}=2x-5$, $w=\dfrac{-3x+3}{-3}=x-1$

Abbiamo trovato che $\mathrm{Sol}(A,b)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x-3\\2x-5\\x-1\end{pmatrix}, x\in\Re\right\}$, ovvero $\mathrm{Sol}(A,b)=\left\{\begin{pmatrix}0\\-3\\-5\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$