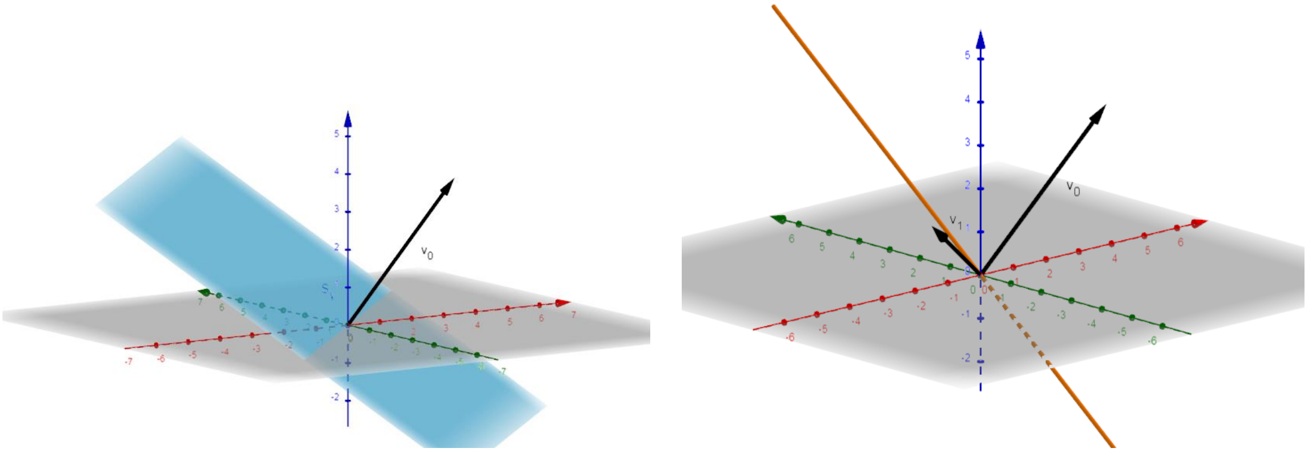
Indice

COMPLEMENTO ORTOGONALE IN $\Re^n$

Consideriamo un sottoinsieme $S \subseteq \Re^n$. Si chiama *complemento ortogonale* di *S* in $\Re^n$, e si indica con $S^\perp$, il sottoinsieme di $\Re^n$ definito da:

$$S^\perp = \{v \in \Re^n : \forall s \in S \;\; v \cdot s = 0\},$$

cioè lo spazio contenente tutti i vettori che sono perpendicolari a tutti i vettori di *S*.



Questi sono due esempi di complementi ortogonali.
Nel primo, dato lo spazio $S = \{v_0\}$ (il vettore in nero), il complemento ortogonale è il piano passante per l'origine perpendicolare a v_0.
Nel secondo, dato lo spazio $S = \{v_0, v_1\}$ (i due vettori in nero), il complemento ortogonale è la retta (in arancione) passante per l'origine e perpendicolare a entrambi i vettori.

Proprietà

- $\forall\, S \subseteq \Re^n$, $S^\perp$ è sottospazio vettoriale di $\Re^n$.
  Infatti - $\underline{0} \in S^\perp$ perché $\forall s \in S \;\; 0 \cdot s = 0$;
  - dati $v, w \in S^\perp$, anche $v + w \in S^\perp$ perché $\forall\, s \in S$ si ha $v \cdot s = w \cdot s = 0$ per ipotesi, e dunque $(v+w)\cdot s = v \cdot s + w \cdot s = 0$
  - dati $v \in S^\perp$ e $k \in \Re$ si ha $k \cdot v \in S^\perp$ perché $\forall\, s \in S \quad v \cdot s = 0$ per ipotesi e dunque $(k \cdot v)\cdot s = k \cdot (v \cdot s) = 0$
- Se $S \subseteq T$ allora $S^\perp \supseteq T^\perp$; più sono i vettori che formano *S*, più piccolo è il loro complemento
  Infatti $\forall v \in T^\perp$, $\forall v' \in T$ vale $v \cdot v' = 0$; ma per ipotesi tra i vettori di *T* ci sono anche i vettori di *S*, per i quali varranno dunque le stesse condizioni di *T*. Quindi sarà vero che $\forall v' \in S \quad v \cdot v' = 0$, cioè vuol dire che $v \in S^\perp$.
- $\forall S \subseteq \Re^n \quad S \subseteq S^{\perp\perp}$, ossia un insieme *S* è un sottoinsieme del suo doppio ortogonale.
  Compiere due volte l'operazione del complemento ortogonale su un insieme in generale non ripristina la situazione iniziale. Ad esempio, dati due vettori, il loro complemento ortogonale è la retta perpendicolare ad entrambi; l'ortogonale della retta non sono i due vettori, bensì il piano perpendicolare alla retta.
  Infatti, dati $v \in S$, $v' \in S^\perp$ $\cancel{, v'' \in S^{\perp\perp}}$ è vero che $v \cdot v' = 0$ $\cancel{\text{e che } v'' \cdot v' = 0}$
  ~~Dunque sarà vero che $v \cdot v'' = 0$ e che~~ quindi $v \in S^{\perp\perp}$.

- Se S è un sottospazio vettoriale di $\Re^n$, allora si verifica che $S = S^{\perp\perp}$
  Nel caso del *complemento ortogonale* di un sottospazio vettoriale, eseguire l'operazione due volte significa tornare alla situazione iniziale, a differenza che nel caso di insiemi in generale. Per questo si parla di "complemento".
- $\forall\, S \subseteq \Re^n$, $S^\perp = (\text{Span}(S))^\perp$: ogni complemento ortogonale di un sottospazio è uguale al complemento ortogonale del sottospazio generato dai vettori di S.
- ~~Dalle figure presentate all'inizio, si deduce~~ Come negli esempi fatti all'inizio, si ha anche che $\underline{\dim(S^\perp) = n - \dim(S)}$, dove n è la dimensione di $\Re^n$.

Come si trova il complemento ortogonale di uno spazio?
Se $S = \text{Span}(v_1,\dots,v_k)$ con $v_1,\dots,v_k \in \Re^n$
allora $S^\perp$ è lo spazio $\text{Sol}(A,0)$, dove A è la matrice che ha per righe i vettori $v_1,\dots,v_k$.

Ossia la matrice è $A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \dots \\ \dots \\ {}^t v_k \end{pmatrix}$, la matrice che ha per righe i vettori <u>trasposti</u>.

Infatti se $x \in$ ~~$S^\perp$ allora~~ $S^\perp = \text{Span}(v_1,\dots,v_k)^\perp$ ~~, che~~ vuol dire che $v_j \cdot x = 0 \quad \forall\ j = 1\dots k$.

Dunque il sistema omogeneo sarà $A \cdot v = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \dots \\ \dots \\ {}^t v_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$; chiaramente è omogeneo perché per definizione il complemento ortogonale restituisce tutti prodotti scalari nulli (per la condizione di perpendicolarità tra due vettori).

<u>Esempio</u>

Sia S formato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Re^3$, troviamo lo spazio $\{v_1\}^\perp$, che è uguale a $(\text{Span}(v_1))^\perp$.

Determiniamo il sistema omogeneo associato: $\text{Sol}(A,0) = \text{Sol}((1 \;\; 1 \;\; 1),\ 0), \cancel{=} (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \cancel{0}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$.

Il sistema determinato è $\{x + y + z = 0$ che, risolto ad esempio scegliendo x e z come parametri, ha soluzione $\text{Sol}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x-z \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \Re \right\}$. Abbiamo trovato che $S^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

e anche che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $S^\perp$, in accordo con $\dim(S^\perp) = n - \dim(S) = 3 - 1 = 2$

<u>Esempio</u>

Sia S formato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \Re^3$ troviamo $\{v_1, v_2\}^\perp = (\text{Span}(v_1, v_2))^\perp$

Impostiamo il sistema $Ax = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che, risolto scegliendo z come parametro, ha

soluzione $\text{Sol}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \Re \right\}$; quindi $S^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Verifichiamo la seconda proprietà su i due esempi: deve essere che $\{v_1\} \subseteq \{v_1, v_2\} \Rightarrow \{v_1\}^\perp \supseteq \{v_1, v_2\}^\perp$.
Infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Osservazione
Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale si comporta come un nucleo. In particolare è il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ {}^t v_k \end{pmatrix}$; infatti il procedimento per trovare un complemento ortogonale è quello di risolvere il sistema omogeneo $Ax = 0$, che è esattamente la definizione di nucleo di un'applicazione. D'altro canto avevamo già dimostrato che $\text{Sol}(A,0)$ è il nucelo dell'applicazione lineare associata ad A.

ASSEGNAZIONE DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE
Stiamo vedendo diversi modi di definire un sottospazio vettoriale. Abbiamo detto che un sottospazio può venire definito ~~mediante un suo~~ come complemento ortogonale in $\Re^n$ ~~costituito da~~ di k vettori, ossia mediante lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$, con A matrice le cui righe sono formate dai k vettori, e quindi, come abbiamo detto poco fa, anche mediante il nucleo Ker f dell'applicazione lineare $f : \Re^n \to \Re^k$ associata alla matrice A.

Un altro modo per definire un sottospazio vettoriale è mediante l'immagine Im f dell'applicazione lineare $f : \Re^h \to \Re^n$ e dunque come sottospazio generato dai vettori $w_1, \ldots, w_h$.
Ossia un sottospazio vettoriale può essere assegnato anche mediante l'insieme delle combinazioni lineari delle immagini dei vettori di f, cioè come $\text{Span}(w_1, \ldots, w_h)$

È possibile trovare delle basi di un sottospazio vettoriale qualunque sia la modalità in cui viene espresso. In generale, dato un sottospazio come complemento ortogonale si può trovare una base considerandolo come spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\text{Sol}(A,0)$; invece, dato un sottospazio vettoriale espresso come *Span* di un gruppo di vettori, si può trovare una base mediante gli algoritmo di estrazione e completamento di base già visti.

È anche possibile passare dalla prima "modalità" di espressione di un sottospazio vettoriale alla seconda e viceversa.
1. dato un sottospazio espresso secondo la prima modalità, è sufficiente trovarne una base per determinare l'insieme delle combinazioni lineari che generano il sottospazio stesso.
Infatti data la base $\{v_1,...,v_k\}$, il sottospazio generato da tali vettori è $\mathrm{Span}(v_1,...,v_k)$.
2. dato un sottospazio espresso secondo la seconda modalità, ad esempio $V = \mathrm{Span}(w_1,..., w_h)$, è sufficiente ~~calcolarne una base (attraverso gli algoritmi già descritti) e poi~~ trovare il complemento ortogonale dello spazio generato dai vettori ~~della base trovata~~.
In entrambe le "conversioni" è necessaria la risoluzione di un sistema lineare.

<u>Esempio</u>

Dato $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$, espresso come complemento ortogonale, si risolve il sistema lineare già calcolato prima (i vettori di V sono quelli di un esempio precedente); la soluzione di tale sistema sarà scritta nella forma di uno spazio di generatori, e in questo caso particolare come $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, e tale forma sarà proprio una seconda espressione dello stesso sottospazio vettoriale.

<u>Esempio</u>

Dato $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$, per esprimerlo ~~esprimiamolo~~ come complemento ortogonale. ~~Ossia~~ calcoliamo $V^{\perp}$.

Impostiamo il sistema omogeneo $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (0)$ il quale, scelte x e y come parametri, ha soluzione $\mathrm{Sol}(A,0) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\2y-x\end{pmatrix},\ x,y\in\Re\right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = V^{\perp}$.

È facile verificare che $V^{\perp\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)^{\perp} = V$.

Osservazioni

Dati due sottospazi vettoriali U,W di $\Re^n$, per ricavare il sottospazio $U+W$ conviene esprimere U e W mediante la seconda modalità; infatti se $U = \mathrm{Span}(u_1,...,u_k)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1,..., w_h)$, allora $U+W = \mathrm{Span}(u_1,...,u_k, w_1,..., w_h)$; invece, per ricavare il sottospazio $U\cap W$ conviene avere U e W nella prima modalità: infatti se $U = \{u_1,..,u_k\}^{\perp}$ e $W = \{w_1,.., w_h\}^{\perp}$ allora $U\cap W = \{u_1,..,u_k, w_1,..., w_h\}^{\perp}$.

FORME BILINEARI

Abbiamo fin ora parlato di applicazioni lineari tra ~~sotto~~spazi vettoriali del tipo $f: V \to W$ con *V*, *W* ~~sotto~~spazi a dimensione finita. Esiste un altro tipo di applicazioni, con simili proprietà ma diversa natura.
Un'applicazione $b: V \times W \to \mathrm{K}$ si dice *forma bilineare* se rispetta la linearità sia nel primo fattore *V* che nel secondo fattore *W*. Le forme bilineari si applicano a una coppia di vettori di $\Re^n$ e restituiscono un valore scalare in K. Per semplicità, ci occuperemo solo del caso $\mathrm{K} = \Re$.
Il modello di base per le forme bilineari è il prodotto scalare tra due vettori, che in effetti ha la caratteristica di restituire un numero reale partendo da due vettori.
Vediamo le proprietà delle forme bilineari.

Proprietà

- $\forall v, v' \in V \;\; \forall w \in W \qquad b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$
  $\forall v \in V \;\; \forall w \in W \;\; \forall k \in \Re \qquad b(k \cdot v, w) = k \cdot b(v, w)$
  Questa è la linearità del primo fattore *V*.
- $\forall v \in V \;\; \forall w, w' \in W \qquad b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$
  $\forall v \in V \;\; \forall w \in W \;\; \forall k \in \Re \qquad b(v, k \cdot w) = k \cdot b(v, w)$
  Questa è la linearità del secondo fattore *W*

Nel caso in cui $V = W$, la forma bilineare si dice *simmetrica*~~. Ciò avviene~~ se
$\forall v, v' \in V \quad b(v, v') = b(v', v)$

Esempi di forme bilineari sono il *prodotto scalare* tra vettori e il determinante di una matrice 2×2.
1. Prodotto scalare : $V = W = \Re^n \qquad b(v, w) = \vec{v} \cdot \vec{w}$; questa è una forma bilineare simmetrica, infatti $v \cdot w = w \cdot v$
2. Determinante : $V = W = \Re^2 \quad b(v, w) = \det((v)\;(w))$; solo il determinante di matrici quadrate di ordine 2 è una forma bilineare, perché è l'unico tipo di matrici quadrate che possono contenere due vettori. Ovviamente i due vettori in input andranno a formare le colonne della matrice. Il determinante non è simmetrico, infatti si ha che $b(v, w) = -b(w, v)$.

MATRICI ASSOCIATE A FORME BILINEARI

Anche le forme bilineari, come le applicazioni lineari, hanno delle matrici particolari in grado di rappresentarle rispetto a delle basi. Anche qui, date due basi $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, ..., w_m\}$, si indica la matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ (che vanno considerate entrambi basi di partenza) con la notazione ${}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{B}}$.
Avevamo visto che per un'applicazione lineare $V \xrightarrow{f} W$ la matrice associata rispetto a due basi del dominio e del codominio veniva usata nella formula $f(v)_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}$.
In modo simile, potremmo dire, nel caso di forme bilineari, che $b(v, w) = w_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}$
~~(dobbiamo aggiungere un fattore nella formula, dal momento che si parla di forme bilineari)~~
Questa formula andrebbe bene, se non fosse che le dimensioni non tornano: infatti il vettore *w* ha dimensione $m \times 1$, la matrice ${}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{B}}$ ha dimensione $m \times n$ e il vettore *v* ha dimensione $n \times 1$. Il problema sta nella dimensione del vettore *w* per due motivi: primo perché il prodotto tra *w* e *b* non è conformabile, e secondo perché il risultato finale del triplo prodotto non verrebbe uno scalare come ci aspetteremmo, ossia una matrice 1×1. Per fare in modo che tali condizioni siano rispettate, il vettore *w* dovrebbe avere dimensione $1 \times m$.

Dunque definiamo in modo preciso la formula per usare una matrice associata a una forma bilineare:

$$\boxed{b(v,w) = {}^t w_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}}$$

dove ${}^t w_{\mathcal{C}}$ è il vettore $w_{\mathcal{C}}$ trasposto.

Per costruire la matrice ${}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}}$, come per le applicazioni lineari si inserivano per colonna tutte le immagini dei vettori dati, si inseriscono tutte le applicazioni ai vettori $v_1,\dots,v_n$ e $w_1,\dots,w_m$.

Ossia $${}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b(v_1,w_1) & \dots & b(v_n,w_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ b(v_1,w_m) & \dots & b(v_n,w_m) \end{pmatrix}.$$

<u>Esempio 1</u> (prodotto scalare)

Consideriamo le basi canoniche $\mathcal{B} = \mathcal{E}_n = \mathcal{C}$, e troviamo la matrice associata alla forma bilineare $b(v,w) = v \cdot w$.

$${}_{\mathcal{E}_n} b_{\mathcal{E}_n} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & \dots & e_n \cdot e_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ e_1 \cdot e_n & \dots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix}$$, dove $e_1,\dots,e_n$ sono i vettori della base canonica.

La matrice corrisponde alla matrice identità $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio 2</u> (determinante)

Consideriamo le basi canoniche di $\Re^2$ $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2 = \mathcal{C}$, e troviamo la matrice associata alla forma bilineare $b(v,w) = \det((v)(w))$.

$${}_{\mathcal{E}_2} b_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \det(e_1,e_1) & \det(e_2,e_1) \\ \det(\underset{1}{e_2},\underset{2}{e_1}) & \det(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che le matrici associate rispetto alle basi canoniche rispettano le operazioni che rappresentano. Utilizziamo la formula vista prima $b(v,w) = {}^t w_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}$.

1. $$v \cdot w = {}^t w_{\mathcal{E}_n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot v_{\mathcal{E}_n}$$; la matrice identità è un elemento neutro, e dunque il prodotto si riduce a $v \cdot w = {}^t w \cdot v$ (i vettori rispetto alle basi canoniche rimangono se stessi).

L'uguaglianza è vera, infatti $$\begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = w_1 v_1 + \dots + w_m v_n$$, che è il prodotto scalare.

2. $$\det((v)(w)) = {}^t w \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 & -w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = w_2 v_1 - w_1 v_2$$, che è proprio la formula del determinante di una matrice 2×2.

MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE PER FORME BILINEARI

Avevamo visto che la matrice di cambiamento di base, nel caso delle applicazioni lineari, era data dalla applicazione identità espressa nella formula ${}_{\mathcal{C}'} f_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}} f_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}$

Per trovare una formula analoga nel caso di forme bilineari dobbiamo partire dalla seguente considerazione : ${}^{t}w_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}} = b(v,w) = {}^{t}w_{\mathcal{C}'} \cdot {}_{\mathcal{C}'} b_{\mathcal{B}'} \cdot v_{\mathcal{B}'}$, ossia l'espressione di una forma bilineare rispetto a due basi è la stessa qualsiasi siano le basi scelte (in questo esempio $b(v,w)$ ha una medesima espressione sia rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ che rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$).

Sappiamo già che $v_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} \cdot v_{\mathcal{B}'}$ e che $w_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \cdot w_{\mathcal{C}'}$ dalle formule per le applicazioni lineari. Se vogliamo sostituire le ultime due espressioni nella formula generale però, dobbiamo calcolare ${}^{t}w_{\mathcal{C}}$, e non $w_{\mathcal{C}}$; ricordando le proprietà delle matrici trasposte, scriviamo:

${}^{t}w_{\mathcal{C}} = {}^{t}w_{\mathcal{C}'} \cdot {}^{t}{}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ (perché ${}^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A$).

Dunque sostituendo tutto, troviamo : ${}^{t}w_{\mathcal{C}'} \cdot {}^{t}{}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \cdot {}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} \cdot v_{\mathcal{B}'}$

Confrontando questa formula con quella che avevamo all'inizio ${}^{t}w_{\mathcal{C}'} \cdot {}_{\mathcal{C}'} b_{\mathcal{B}'} \cdot v_{\mathcal{B}'}$, osservando che il primo e l'ultimo fattore sono gli stessi in entrambi, ~~non è difficile convincersi che~~ si può ricavare

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'} b_{\mathcal{B}'} = {}^{t}{}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \cdot {}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}}$$

, che è una formula molto simile a quella vista per le applicazioni lineari. L'unica differenza è che la prima matrice identità è in questo caso trasposta.

Confrontando tale matrice identità nelle due formule, per le applicazioni lineari e per le forme bilineari, si nota che tali formule sono identitche se e solo se ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ è una matrice ortogonale, cioè se e solo se ${}^{t}{}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'} = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}$

Infatti, nella formula per le applicazioni lineari, il primo fattore ${}_{\mathcal{C}'}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ può essere scritto come ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}$

<u>Esempio</u>

Troviamo la matrice associata al prodotto scalare in $\Re^{3}$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

partendo dalle basi canoniche $\mathcal{E}_{3}$.

Il modo più diretto sarebbe quello di calcolari tutti i prodotti scalari tra i vettori e inserirli nella matrice:

${}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_2 v_1 & v_3 v_1 \\ v_1 v_2 & v_2 v_2 & v_3 v_2 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix}$; tramite la matrice di cambiamento di base, invece, applichiamo la

formula: ${}_{\mathcal{C}} b_{\mathcal{B}} = {}^{t}{}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\substack{\cancel{\mathcal{E}} \\ \mathcal{B}}} \cdot {}_{\mathcal{E}} b_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\substack{\cancel{\mathcal{E}} \\ \mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 20 \end{pmatrix}$. Notiamo che è una matrice simmetrica, proprio come il prodotto scalare.

CARATTERISTICHE delle FORME BILINEARI

Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ può venire catalogata secondo diverse sue proprietà, alcune delle quali abbiamo già visto descrivendo il prodotto scalare tra vettori.
Una forma bilineare può essere *simmetrica, non degenere, definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa* e *semidefinita negativa*.
Vediamo di descrivere le proprietà singolarmente .

- Una forma bilineare si dice *simmetrica* se $\forall\, v \in V \;\; \forall\; w \in W \quad b(v,w) = b(w,v)$. Abbiamo già visto che il prodotto scalare è una forma simmetrica, mentre il determinante non lo è.
- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ si dice *non degenere* se $\forall\, v \neq 0 \in V \;\; \exists\; v' \in V \;\; / \;\; b(v,v') \neq 0$.

  diverso da 0

  Il prodotto scalare è non degenere: infatti, dato un vettore $v \in \Re^n$, esiste un ~~altro~~ vettore per cui il loro prodotto scalare non è nullo. Ad esempio, il vettore stesso. Infatti $v \cdot v = \|v\|^2$, che è un valore ~~sempre~~ maggiore di zero. Dunque, dato che esiste almeno un vettore che rendere il prodotto scalare non nullo, concludiamo che la forma $b(v,v') = v \cdot v'$ è non degenere.

  Il determinante di una matrice 2×2 è non degenere: infatti, dato un generico vettore di $\Re^2$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, esiste almeno un altro vettore v' tale che $\det((v)(v')) \neq 0$. Questo vettore è ad esempio $v' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$: si ha che $\det\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2$, un valore ~~sempre~~ diverso di zero.
- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ <u>simmetrica</u> (per ipotesi) si dice *definita positiva* se $\forall\, v \neq 0 \in V \;\; b(v,v) > 0$.

  Il prodotto scalare è una forma definita positiva: abbiamo già visto infatti che $v \cdot v = \|v\|^2$, ossia il prodotto scalare tra due vettori uguali dà la norma del vettore al quadrato, che è un valore sicuramente strettamente positivo (l'unico caso in cui la norma di un vettore è nulla è quando il vettore stesso è nullo: possibilità da scartare per ipotesi).
  Per quanto riguarda il determinante in $\Re^2$, non ha senso chiedersi se si tratta di una forma definita positiva, perché non rispetta la condizione di simmetria dell'ipotesi.
- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ <u>simmetrica</u> si dice *semidefinita positiva* se $\forall\, v \neq 0 \in V \;\; b(v,v) \geq 0$. Si nota che l'essere ~~semi~~definita positiva di una forma bilineare implica il suo essere semi definita positiva, ma <u>non</u> viceversa.
  Esempio. Dato che né il prodotto scalare né il determinante in $\Re^2$ sono forme semidefinite positive, definiamone una terza a partire dalla sua matrice associata: ${}_{\mathcal{E}}b_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Utilizziamo la formula della matrice di cambiamento di base sulla forma applicata a due vettori generici $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = (x' \quad y') \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\; = \; x \cdot x'$

  Consideriamo ora l'effetto della forma bilineare così definita su due vettori uguali:
  $b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \; x^2$, che è un valore sempre maggiore o uguale a zero.

- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ <u>simmetrica</u> si dice *definita negativa* se $\forall v \neq 0 \in V \ \ b(v,v) < 0$
  Un esempio di questo tipo di forma bilineare è dato dal prodotto scalare cambiato di segno: $b(v,v') = -v \cdot v'$; tale forma, applicata a due vettori uguali, è sempre strettamente negativa dal momento che $b(v,v) = -\|v\|^2$.
- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ <u>simmetrica</u> si dice *semidefinita negativa* se $\forall v \neq 0 \in V \ \ b(v,v) \leq 0$. Si nota che l'essere ~~semi~~definita negativa di una forma bilineare implica il suo essere semi definita negativa, ma <u>non</u> viceversa.
  Un esempio di forma bilineare di questo tipo è dato da $b(v,v') = b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = -x \cdot x'$.
- Una forma bilineare $b: V \times W \to \Re$ si dice *indefinita* se non rispetta alcuna delle condizioni fin ora descritte. Un esempio è dato dalla forma bilineare la cui matrice associata è $_{\mathcal{E}}b_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tale forma, applicata la formula, è data da $b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x \cdot x' - y \cdot y'$.
  Applicandola a due vettori uguali, si ottiene $b(v,v) = x^2 - y^2$, il cui segno non è univocamente determinato. Ad esempio $b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$, mentre $b\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$.
- Una forma bilineare definita positiva o definita negativa è necessariamente non degenere
- ~~Una forma bilineare semidefinita positiva o semidefinita negativa è necessariamente degenere.~~

Minori principali
Prima di continuare con le forme bilineari, ritorniamo sul concetto di minore di una matrice. Abbiamo già visto che un minore di ordine *k* di una matrice $m \times n$ è una sottomatrice quadrata ottenuta eliminando dalla matrice iniziale $m - k$ righe e $n - k$ colonne. Abbiamo anche detto che una matrice possiede esattamente $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ minori di ordine *k*. Non è difficile verificare che una matrice quadrata $n \times n$ possiede $\binom{n}{k}^2$ minori di ordine *k*.

Se *A* è una matrice <u>quadrata</u> e <u>simmetrica</u> un suo minore di ordine *k* si dice *minore principale* se i suoi indici di riga e i suoi indici di colonna (rispetto alla matrice *A*) corrispondono. O meglio, un minore principale è un minore simmetrico rispetto alla diagonale principale di *A*.

Per esempio, un minore principale di ordine 2 della matrice 3×3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, i cui indici di riga sono 2 e 3, e gli indici di colonna sono sempre 2 e 3. Si può dimostrare che una matrice quadrata e simmetrica possiede $\binom{n}{k}$ minori principali. Il numero ~~La somma~~ di tutti i minori principali di una matrice (non solo quelli di ordine *k*) sarà dat~~a~~o da $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$; dal momento che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ è la somma di ogni riga del triangolo di Tartaglia, ed è pari a 2^n, si trova che $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$.

<u>Come va interpretata una matrice associata a una forma bilineare ?</u>
La matrice associata a una forma bilineare può dare informazioni sulle caratteristiche di tale forma

- Se $b : V \times W \to \Re$ è simmetrica, allora ogni matrice associata a V ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ è simmetrica.
  Questa relazione è vera per tutte le basi di *V*.
  Infatti ${}_{\mathcal{B}'}b_{\mathcal{B}'} = {}^{t}{}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} \cdot {}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}$
  e ${}^{t}{}_{\mathcal{B}'}b_{\mathcal{B}'} = {}^{t}{}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} \cdot {}^{t}{}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}$
  Dato che ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = {}^{t}{}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ perché simmetrica per ipotesi, l'uguaglianza è verificata.
- Se $b : V \times W \to \Re$ è non degenere, allora ogni matrice associata a V ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ è non singolare.
  Questa relazione vale per ogni base di *V*.
  Per la matrice associata al prodotto scalare, ossia la matrice identità, si ha infatti: $\det I_n = 1 \neq 0$
  Per la matrice associata al determinante si ha: $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$
- Se $b : V \times W \to \Re$ è definita positiva, allora tutti i minori principali della matrice associata ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ hanno determinante strettamente positivo. La relazione vale per ogni base di *V*.
- Se $b : V \times W \to \Re$ è semidefinita positiva, allora tutti i minori principali della matrice associata ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ hanno determinante maggiore o uguale a zero. La relazione vale per ogni base di *V*.
- Se $b : V \times W \to \Re$ è definita negativa, allora tutti i minori principali della matrice associata cambiata di segno $-{}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ hanno determinante strettamente positivo.
- Se $b : V \times W \to \Re$ è semidefinita negativa, allora tutti i minori principali della matrice associata cambiata di segno $-{}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ hanno determinante maggiore o uguale a zero.
- Se $b : V \times W \to \Re$ è indefinita, allora non vale nessuna delle precedenti condizioni.

Determinare se una matrice è definita positiva o negativa avendo a disposizione la matrice associata, sembra richiedere il calcolo di $2^n - 1$ determinanti (tanti quanti i minori principali).
In effetti esiste una scorciatoia, applicabile solo per verificare se una forma bilineare è definita positiva o negativa, ma <u>non</u> per verificare se è semidefinita positiva o negativa.
La scorciatoia consiste nel calcolare solamente i determinanti dei minori principali "inscatolati", ossia tali che il più piccolo è racchiuso in quello di ordine superiore. Ad esempio i minori principali inscatolati di una matrice 3×3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ possono essere $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, (a_{33})
Ovviamente ci sono altre scelte, ma ne basta una. Dunque la verifica si riduce al calcolo di *n* determinanti (si prende solo un minore principale per ogni ordine *k*).
<u>Esempio</u>
Data la matrice associata alla forma bilineare ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcoliamo il determinante dei minori principali $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (2) inscatolati. I determinanti sono 21, 6 e 2. Dato che sono tutti e tre diversi da 0, possiamo dire che la forma bilineare è definita positiva.

Diamo ora delle definizioni che tornerannno utili.
Il *prodotto scalare canonico* $(.,.): \Re^n \times \Re^n \to \Re$ su $\Re^n$ è la funzione data da

$$v \cdot w = v_1 w_1 + ... + v_n w_n = {}^t w \cdot v$$

per ogni $v = {}^t(v_1,...,v_n)$, $w = {}^t(w_1,...,w_n) \in \Re^n$

Si definisce *spazio vettoriale metrico* uno spazio vettoriale *V* su $\Re$ provvisto di un prodotto scalare definito positivo. La *norma* $\|..\|: V \to \Re^+$ in questo spazio vettoriale metrico è definita da $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$.
La norma $\|v\|$ di un vettore *v* si dice *lunghezza* di *v*.

BASI ORTOGONALI

Vediamo ora una relazione tra le basi e gli spazi vettoriali metrici.
Sia *V* uno spazio vettoriale metrico, e $v_1,...,v_k \in V$ vettori non nulli <u>ortogonali a due a due</u>, cioè tali che $v_i \perp v_j$ non appena $i \neq j$. Allora $v_1,...,v_k$ sono linearmente indipendenti. In particolare, se $\dim V = n$, allora *n* vettori non nulli a due a due ortogonali sono automaticamente una base di *V*.

Una *base ortogonale* di uno spazio vettoriale metrico V è una base $\{v_1,...,v_n\}$ di *V* composta da vettori a due a due ortogonali, ovvero tali che valga $v_i \cdot v_j = 0$ per $1 \leq i \neq j \leq n$.

<u>Esempio</u>

La base $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\}$ è ortogonale: infatti $v_1 \cdot v_2 = 2 - 2 = 0$

Esiste un altro tipo di base ancora più speciale.

Una *base ortonormale* di uno spazio vettoriale metrico *V* è una base ortogonale composta da vettori di lunghezza unitaria. In altri termini, una base $\{v_1,...,v_n\}$ di uno spazio vettoriale metrico è una base ortonormale se e solo se $$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \;\; i = j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases}$$

<u>Esempio</u>

La base $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} \right\}$ è ortonormale: infatti $v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ $v_1 \cdot v_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e

$v_2 \cdot v_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

- Una base $\mathcal{B}$ associata al prodotto scalare canonico è ortogonale se e solo se la matrice associata ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ è diagonale.

Infatti la matrice associata ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & \dots & b(v_n,v_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ b(v_1,v_n) & \dots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix}$, dal momento che $\mathcal{B}$ è ortogonale per ipotesi, avrà elementi nulli in corrispondenza di indici *i* e *j* diversi, ossia in tutti le posizioni fuorché quelle sulla diagonale (dove si hanno indici di riga e colonna uguali). La matrice dunque sarà ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$, che è una matrice diagonale. L'implicazione vale in entrambi i sensi, ed è abbastanza evidente che se una matrice associata è diagonale allora la base è ortogonale.

- Una base $\mathcal{B}$ associata al prodotto scalare canonico è ortonormale se e solo se la matrice associata ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ è la matrice identità.
  Infatti, dato che la base è ortonormale per ipotesi, la matrice associata al prodotto scalare avrà gli elementi diagonali composti da tutti 1 (perché per gli elementi diagonali si ha $i = j$) e tutti gli altri elementi pari a zero.

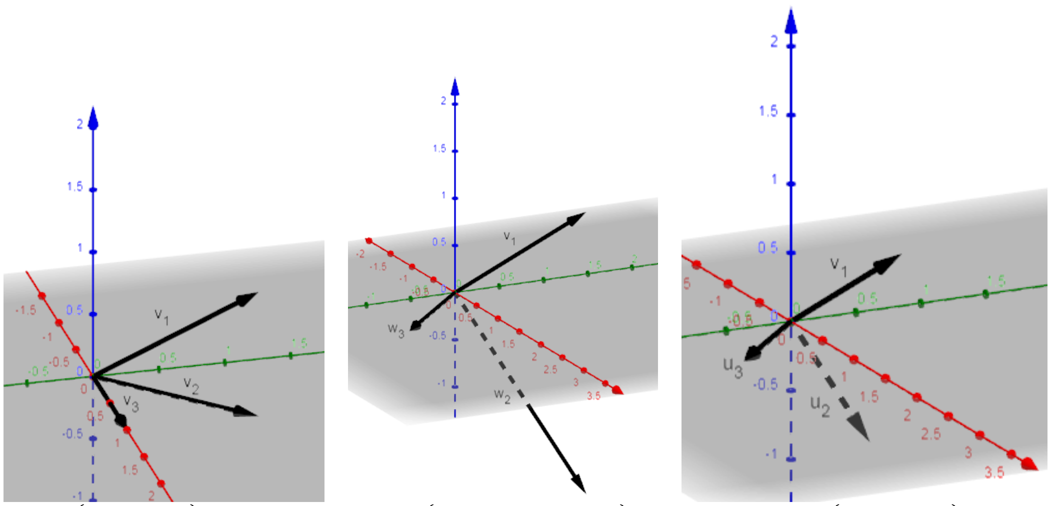
- Una matrice *A* è ortogonale se e solo se le colonne (e le righe) di *A* formano una base <u>ortonormale</u> di $\Re^n$.
  Una matrice *A* si dice ortogonale se la sua inversa è uguale alla sua trasposta: $A^{-1} = {}^tA$.
  In particolare si avrà che ${}^tA \cdot A = I_n$. Utilizzando questa uguaglianza, si verifica la proposizione. Consideriamo la matrice *A* formata da vettori colonna $v_1,\dots,v_n$:
  $A = ((v_1)\dots(v_n))$; vediamo se, sapendo che *A* è ortogonale, è vero che le sue colonne formano una base ortonormale. ${}^tA \cdot A = I_n = \begin{pmatrix} (v_1) \\ \dots \\ (v_n) \end{pmatrix} \cdot ((v_1)\dots(v_n)) = I_n$

  Si trova che ${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} v_1v_1 & \dots & v_1v_n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_nv_1 & \dots & v_nv_n \end{pmatrix}$ che, per quando detto dovrà essere la matrice identità.
  Ciò vuol dire che $v_1v_1 = v_2v_2 = \dots = v_nv_n = 1$ e $v_i \cdot v_j = 0 \quad se\ i \neq j$, ossia le condizioni di una base ortonormale.

  - L'implicazione vale anche al contrario. Data una matrice *A* con colonne (e righe) che formano una base ortonormale di $\Re^n$, si ha che tale matrice è ortogonale.
  Se le colonne formano una base ortonormale, ciò vuol dire che la loro matrice associata è I_n.
  Dunque $\begin{pmatrix} v_1v_1 & \dots & v_nv_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1v_n & \dots & v_nv_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\dots & 0 \\ 0\dots & 1 \end{pmatrix}$; esprimendo la prima matrice come $\begin{pmatrix} (v_1) \\ \dots \\ (v_n) \end{pmatrix} \cdot ((v_1)\dots(v_n))$ ossia come prodotto righe per colonne ${}^tA \cdot A$, si trova che ${}^tA \cdot A = I_n$: cioè *A* è ortogonale.

PROCEDIMENTO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

Vediamo ora un algoritmo che permette di trasformare una base qualsiasi $\{v_1,\dots,v_n\}$ di $\Re^n$ in una base ortogonale $\{w_1,\dots,w_n\}$ di $\Re^n$ mediante dei passaggi algebrici. Il procedimento assicura che $\forall\ j=1\dots n \quad w_j \in \mathrm{Span}(v_1 \dots v_j)$,
ossia $w_1 \in \mathrm{Span}(v_1)$, $w_2 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$....$w_n \in \mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$
Con un ulteriore calcolo, è possibile trasformare a sua volta la base ortogonale ottenuta in una base ortonormale $\{u_1,\dots u_n\}$ di $\Re^n$. Anche per questa base varrà la relazione descritta per gli elementi della base ortogonale.



base $\{v_1, v_2, v_3\}$ base $\{w_1 = v_1, w_2, w_3\}$ base $\{u_1, u_2, u_3\}$

1. Per trasformare una base qualsiasi in una base ortogonale, ossia una base che ha tutti i suoi elementi a due a due ortogonali, è necessario l'utilizzo delle proiezioni. Dati due vettori $v_1, w_1 \in \Re^n$ infatti, si ha che $v_1 \perp w_1 - p_{v_1}(w_1)$, ossia v_1 è perpendicolare alla differenza tra w_1 e la proiezione di w_1 lungo v_1. Nel nostro caso, quindi, dati *n* vettori che formano una base, sceglieremo come primo vettore w_1 della base ortogonale il primo vettore della base di partenza: ossia porremo $v_1 = w_1$ (bisogna infatti partire da un vettore dato); il secondo vettore w_2 della base ortogonale, invece, sarà dato da $w_2 = v_2 - p_{w_1}(v_2)$, dove v_2 è il secondo vettore della base di partenza a cui vogliamo modificare le coordinate in modo che sia perpendicolare a $v_1 = w_1$. Il terzo vettore w_3 della base ortogonale, a sua volta, sarà dato da $w_3 = v_3 - p_{w_1}(v_3) - p_{w_2}(v_3)$, dove v_3 è il terzo vettore della base di partenza. Per $1<k\le n$ il k-esimo vettore w_k della base ortogonale si ricaverà chiaramente così: $w_k = c_k \cdot \left(v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{w_j}(v_k) \right)$, dove c_k è un opportuno coefficiente da moltiplicare a un vettore in modo da semplificare eventualmente i denominatori delle coordinate (è possibile, dato che un vettore e ogni suo multiplo giacciono sulla stessa retta).

2. Ottenuta la base ortogonale $\{w_1,\dots,w_n\}$, il calcolo della base ortonormale è immediato. Dato che bisogna trasformare i vettori $w_j \ \ \forall\, j = 1\dots n$ con norma pari a $\|w_j\|$ in vettori $u_j \ \ \forall\, j = 1\dots n$ con norma $\|u_j\| = 1$, basterà dividere ogni vettore w_j per la sua norma. In questo modo si otterranno tutti vettori di lunghezza unitaria: infatti, $\forall\, v \in \Re^n$, si ha che $\left\| \dfrac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \dfrac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \dfrac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$

   La base ortonormale sarà data, dunque, da: $\left\{ \dfrac{w_1}{\|w_1\|},\dots,\dfrac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$

<u>Esempio</u>

Data la base di $\Re^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, ortonormalizziamo tale base.

Poniamo $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Troviamo w_2 mediante la formula $w_2 = v_2 - p_{w_1}(v_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\|w_1\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$; moltiplichiamo il vettore trovato $c_2 =$ per 3 e otteniamo $w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Per trovare w_3 applichiamo $w_3 = v_3 - p_{w_1}(v_3) - p_{w_2}(v_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\|w_1\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\cancel{0}\,{-2}\end{pmatrix}}{\|w_2\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\cancel{0}\,{-2}\end{pmatrix}$

$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/6\\1/6\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$; moltiplichiamo $c_3 =$ per 2 e otteniamo $w_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Si verifica che i vettori sono ortogonali a due a due, infatti $w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot w_3 = w_2 \cdot w_3 = 0$

La base ortonormale sarà data dai vettori trovati divisi per le rispettive norme. Troviamo che $\|w_1\| = \sqrt{3},\ \|w_2\| = \sqrt{6},\ \|w_3\| = \sqrt{2}$; dunque la base ortonormale sarà data da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

DIAGONALIZZAZIONE DI FORME BILINEARI (simmetriche)

Diagonalizzare una forma bilineare significa fare in modo che una sua matrice associata sia diagonale. Avere a disposizione una matrice diagonale risulta in molti casi più comodo rispetto a una matrice non diagonale, perché i valori in gioco sono di meno. Ciò che si cerca di fare è cambiare una base dello spazio vettoriale su cui è definita la forma bilineare in modo tale che la ~~forma bilineare~~ matrice associata alla forma bilineare rispetto a quella base sia diagonale.

Si dice che una base $\mathfrak{B}$ di uno spazio vettoriale V definito sul campo $\mathrm{K} = \Re$ *diagonalizza* una forma bilineare b definita sullo stesso V se la matrice associata ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ è diagonale.

La condizione necessaria affinché una forma bilineare sia diagonalizzabile è la simmetria della forma stessa. $\quad b$ diagonalizzabile $\Rightarrow b$ simmetrica

Infatti, se b è diagonalizzabile, vuol dire che ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ è diagonale; una matrice diagonale è anche simmetrica, dunque anche la forma bilineare b associata a ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ sarà simmetrica.

È vera anche l'implicazione inversa, ed è l'enunciato principale del seguente teorema.

Teorema di Sylvester : Sia V uno spazio vettoriale ~~metrico~~ su $\Re$, di dimensione $\dim V = n$.

- Una forma bilineare b simmetrica è diagonalizzabile.
- Esistono tre numeri naturali, indicati con n_+, n_-, n_0 e denominati complessivamente *segnatura* di b, tali che ogni base ~~ortogonale~~ $\{u_1,...,u_n\}$ di V che diagonalizza b possiede esattamente n_+ vettori u_i tali che $b(u_i,u_i) > 0$, n_- vettori u_i tali che $b(u_i,u_i) < 0$ e n_0 vettori u_i tali che $b(u_i,u_i) = 0$.

  n_+ si chiama indice di positività di b

  n_- si chiama indice di negatività di b

  n_0 si chiama indice di nullità di b.
- ~~Esiste una base ortogonale di V per b.~~
- ~~Due basi ortogonali di V hanno stessa segnatura, che quindi dipende solo da b.~~

Il teorema ci dice che, per qualsiasi base $\mathfrak{B}$ che diagonalizzi b, si ha che ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ ha sulla diagonale n_+ termini strettamente positivi, n_- termini strettamente negativi e n_0 termini nulli.

Inoltre, ci dice che per trovare il valore dei tre indici basta costruire una base ~~ortogonale~~ $\{u_1,...,u_n\}$ di V che diagonalizzi b e calcolare ~~i prodotti scalari~~ $b(u_1,u_1),...,b(u_n,u_n)$.

Osservazione : $n_+ + n_- + n_0 = n$, dove n è la dimensione di V.

<u>Esempio</u>

La forma bilineare rappresentata dalla ~~La~~ matrice diagonale ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -5 & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ ha segnatura: $n_+ = 1$, $n_- = 2$, $n_0 = 1$

Parleremo dei metodi di diagonalizzazione di una matrice più avanti.
Ora vediamo un breve algoritmo che consente di semplificare ulteriormente una matrice che diagonalizza una forma bilineare *b*.
In particolare, data una base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ che diagonalizza *b*, allora si può ottenere mediante un procedimento simile all'~~orto~~ a normalizzazione ~~di Gram-Schmidt~~ un'altra base $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tale che la matrice associata ${}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{C}}$ sia costituita da tanti 1 quanti ne indica la positività di *b*, tanti -1 quanti ne indica la negatività di *b*, e tanti 0 quanti ne indica la nullità di *b*.
In altri termini, questo algoritmo ci fornirà una matrice diagonale a tre blocchi: I_{n_+} , I_{n_-} e 0.

1. Per prima cosa, si riordini la matrice ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ in modo tale che $b(v_j, v_j) = \begin{cases} > 0\,, & se \;\; 1 \le j \le n_+ \\ < 0\,, & se \;\; n_+ < j \le n_- + n_+ \\ = 0\,, & se \;\; n_+ + n_- < j \le n \end{cases}$

2. Poi, si ricavi la matrice ${}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{C}}$ associata alla base $\mathcal{C}$ nel seguente modo:
   - Gli elementi nulli di ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ rimangono invariati : $w_{j_0} = v_{j_0}$
   - Gli elementi positivi di ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ vanno ridotti a elementi unitari: $w_{j+} = \dfrac{1}{\sqrt{b(v_{j+}, v_{j+})}} \cdot v_{j+}$

     La formula funziona : infatti $b(w_{j+}, w_{j+}) = b\left(\dfrac{1}{\sqrt{b(v_{j+}, v_{j+})}} \cdot v_{j+}, \dfrac{1}{\sqrt{b(v_{j+}, v_{j+})}} \cdot v_{j+} \right) =$

$$\frac{1}{\sqrt{b(v_{j+}, v_{j+})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b(v_{j+}, v_{j+})}} \cdot b(v_{j+}, v_{j+}) = \frac{1}{b(v_{j+}, v_{j+})} \cdot b(v_{j+}, v_{j+}) = 1$$

   - Gli elementi negativi di ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}}$ vanno ridotti a elementi unitari negativi: $w_{j-} = \dfrac{1}{\sqrt{-b(v_{j-}, v_{j-})}} \cdot v_{j-}$

<u>Esempio</u>

Applichiamo l'algoritmo sulla matrice ${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Prima ordiniamo gli elementi diagonali, in modo che ci siano primo i positivi, poi i negativi e poi i nulli

${}_{\mathfrak{B}}b_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; facciamo in modo che il primo elemento diventi 1 e gli altri -1 :

$$w_1 = \frac{1}{b(v_1, v_1)} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1 \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{-b(v_2, v_2)} \cdot (-5) = -\frac{1}{-5} \cdot (-5) = -1$$

Il terzo elemento vale già -1, quindi non facciamo nulla; l'ultimo elemento rimane 0.
Abbiamo dunque trovato una matrice diagonale ancora più semplice.

Relazione tra segnatura e tipologie di forme bilineari

Sia b una forma bilineare simmetrica, e sia (n_+, n_-, n_0) la segnatura di b; allora b è:

- non degenere, se $n_+ + n_- = n \Leftrightarrow n_0 = 0$
- definita positiva, se $n_+ = n \Leftrightarrow n_- = n_0 = 0$
- semidefinita positiva, se $n_+ + n_0 = n \Leftrightarrow n_- = 0$
- definita negativa, se $n_- = n \Leftrightarrow n_+ = n_0 = 0$
- semidefinita negativa, se $n_- + n_0 = n \Leftrightarrow n_+ = 0$
- indefinita, se $n_+, n_- > 0$

Se b è definita positiva, allora è un prodotto scalare (canonico); ciò vuol dire che esiste una base $\mathcal{B}$ tale che ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = I_n$, (ottenibile tramite l'algoritmo appena visto); dunque $\mathcal{B}$ è una base ortonormale. Allora, nel caso di forme bilineari definite positive, il procedimento di Gram-Schmidt si può interpretare come diagonalizzazione di b.

<u>Esempio</u>

Sia $V = \mathfrak{R}^3$ e sia ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associata alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Possiamo subito dire che $\mathcal{B}$ non diagonalizza b perché ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}}$ non è una matrice diagonale.

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt otteniamo che una base ortogonale derivata da $\mathcal{B}$ è

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, la cui matrice associata è ${}_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quindi $\mathcal{C}$
~~Tale matrice, essendo diagonale,~~ diagonalizza b.
Allo stesso modo, diremo che la base ortonormale derivata da $\mathcal{C}$, ossia

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, la cui matrice associata è ${}_{\mathcal{D}}b_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$, diagonalizza b.

~~Dato che il teorema di Sylvester ci assicura che due basi ortogonali di uno stesso spazio hanno segnatura identica,~~ possiamo concludere che:
l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt di una base $\mathcal{B}$ corrisponde alla diagonalizzazione di $\cancel{{}_{\mathcal{B}}}\, b\, \cancel{{}_{\mathcal{B}}}$ una forma bilineare simmetrica definita positiva.

DIAGONALIZZAZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K.
Supponiamo anche che $f: V \to V$ sia un'applicazione lineare (in particolare è un *endomorfismo*, dal momento che dominio e codominio coincidono).

Si dice che una base $\mathcal{B}$ di V diagonalizza f se la matrice ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}}$ è diagonale.

Come per le forme bilineari, la diagonalizzazione di una matrice consente calcoli più agevoli sull'applicazione lineare associata, dal momento che i numeri su cui lavorare sono di meno.

Infatti, una matrice diagonale ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Re$, se applicata nella formula

$f(v)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}$, dove $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ è un vettore qualsiasi espresso nella base $\mathcal{B}$, comporta

pochissimi calcoli: infatti l'espressione $f(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \dots \\ \lambda_n a_n \end{pmatrix}$ è quasi immediata.

Vediamo come interpretare questo concetto geometricamente sullo spazio $V = \Re^2$. Esempio:
La base canonica $\mathcal{E}_2$ diagonalizza f, dunque ${}_{\mathcal{E}}f_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale.

Questo vuol dire che l'immagine di un qualsiasi vettore di $\Re^2$ $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sarà $f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_2 a_2 \end{pmatrix}$.

Cioè ogni ~~vettore~~ componente viene "allungat~~o~~a" di un fattore λ_j , $\forall\, j = 1 \dots n$ ~~, in entrambe le direzioni~~.
In particolare, i vettori della base canonica vengono mandati in un loro multiplo:
$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, se $\lambda_2 = 3$; allora è possibile conoscere qualitativamente il comportamento della f.

La diagonalizzazione, in effetti, ha a che fare proprio con questo: definisce se un vettore venga mandato da un'applicazione f in un suo multiplo o meno

$$\boxed{\text{Una base } \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ diagonalizza un'applicazione } f \iff \forall\, j = 1 \dots n \quad f(v_j) = \lambda_j v_j}$$

<u>Dimostrazione I</u>
L'implicazione verso destra ci dice che una base è diagonalizzante solo se l'immagine di ogni vettore è un multiplo del vettore stesso.

Data la matrice diagonale ${}_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, vediamo quanto vale l'immagine di un vettore qualsiasi v_j rispetto alla base $\mathcal{B}$. Per trovare, abbiamo bisogno dei vettori $v_{j\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$, cioè i vettori con un solo elemento non nullo in posizione *j*. A questo punto $f(v_j)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}$

che è proprio un multiplo di v_j.

<u>Dimostrazione II</u>
L'implicazione verso sinistra ci dice, invece, che se l'immagine $f(v_j)$ di un vettore è pari a un multiplo di un vettore stesso, allora la base formata da tali vettori diagonalizza l'applicazione *f*.
La matrice associata sarà data da ${}_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{B}} = ((f(v_1)_{\mathcal{B}})\ (f(v_2)_{\mathcal{B}})\dots(f(v_n)_{\mathcal{B}}))$,

ossia ${}_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{B}} = ((\lambda_1 v_1)(\lambda_2 v_2)\dots(\lambda_n v_n)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, che è una matrice diagonale: dunque $\mathcal{B}$ diagonalizza. I vettori di una base diagonalizzante vengono mandati in un loro multiplo.

AUTOVALORI e AUTOVETTORI

Questo comportamento di alcuni vettori è molto importante, ed esiste una definzione particolare:

> Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su un campo K. Un vettore $v \neq 0 \in V$ è un *autovettore* di *f* relativo all'*autovalore* λ se si ha
> $$f(v) = \lambda \cdot v$$
>
> È detto *autospazio* di *f* relativo all'autovalore λ, ed è sottospazio vettoriale di *V*, l'insieme
> $$V_\lambda = \{v \in V \ / \ f(v) = \lambda v\}$$

Dalla definizione è chiaro che $V_0 = \text{Ker}\, f$, cioè lo zero è un autovalore di *f* se e solo se *f* è singolare.
Più in generale $V_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \cdot I_n)$, per cui λ è un autovalore se e solo se l'endomorfismo $f - \lambda \cdot I_n$ è singolare.
Che V_λ sia un sottospazio di *V* è abbastanza evidente: infatti, $0 \in V_\lambda$ perché $f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$;
se $v, w \in V_\lambda$ allora $v + w \in V_\lambda$ perché $f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda \cdot (v + w)$;
se $v \in V_\lambda$, $k \in \text{K}$ allora $k \cdot v \in V_\lambda$ perché $f(kv) = k \cdot f(v) = k \cdot \lambda v = \lambda \cdot (kv)$.

Osservazioni
Dato un autovettore, l'autovalore corrispondente è unico.
Infatti $\lambda v = \lambda' v \Leftrightarrow v \cdot (\lambda - \lambda') = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda'$ perché v≠0.
Tuttavia, in generale l'autovettore corrispondente a un dato autovalore non è unico.
Se v è un autovettore di f relativo a un autovalore λ, $\forall c \neq 0 \in \mathrm{K}$ si ha che $c \cdot v$ è un autovettore di f relativo allo stesso autovalore λ.

$\lambda \in \mathrm{K}$ si dice autovalore di f se lo è per qualche autovettore di f, non necessariamente per tutti.
Quindi, per definizione, l'autospazio V_λ non è mai ridotto al solo 0 ($\dim(V_\lambda) > 0$)

Si chiama *molteplicità geometrica* di un autovalore λ di f la dimensione dell'autospazio relativo a λ.
Si indica con $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

<u>Esempio</u>

È data la matrice ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ relativa alla base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Allora gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori, e le loro molteplicità geometriche sono
$m_g(3) = 2 = \dim V_3 \qquad m_g(-1) = 1 = \dim V_{-1}$
In generale, se ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}}$ è diagonale la molteplicità geometrica $m_g(\lambda_j)$ è pari al numero di elementi sulla diagonale di ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}}$ uguali a λ_j.

Si osserva che in tal caso $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n = \dim V$, dove k è il numero di autovalori sulla diagonale.

<u>ESEMPI</u>

1. ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; gli autovalori sono $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$, con molteplicità $m_g(2) = 1 = m_g(3)$

   Gli autospazi sono dati da $V_2 = \mathrm{Span}(v_1)$, $V_3 = \mathrm{Span}(v_2)$.

2. ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; l'unico autovalore è $\lambda_1 = 5 \cancel{= \lambda_2}$ con molteplicità $m_g(5) = 2$

   L'autospazio è dato da $V_5 = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

3. ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; l'applicazione moltiplica v_1 per 5, ma non restituisce un multiplo di v_2

   Dunque l'unico autovalore è 5, e la f non è diagonalizzabile, dal momento che non abbiamo una base di autovettori. Qui $m_g(5)=1$.

4. ${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; la matrice corrisponde alla rotazione in $\Re^2$ di $\pi/2$. Ciò vuol dire che nessun vettore ≠0 andrà in un multiplo di se stesso, e f non ha autovettori.

$$\sum_{j=1}^{0} m_g(\lambda_j) = 0 \neq 2 = \dim V$$

Dato l'endomorfismo $f: V \to V$, gli autospazi di f sono in <u>somma diretta</u>, cioè $\sum_{j=1}^{k} V_{\lambda_j} = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}$

Quindi $\dim\left(\bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \dim V_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j)$

Un'eventuale base di autovettori di f si ottiene unendo basi di ciascuno degli autospazi, il che è possibile se e solo se $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n$

Un endomorfismo $f: V \to V$ è diagonalizzabile se esiste una base di V composta da autovettori di f. Ciò avviene se e solo se $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n$

Dunque un endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se esiste una base rispetto a cui è rappresentato da una matrice diagonale.
Se l'endomorfismo f non è diagonalizzabile, si può provare a triangolarlo:

Un endomorfismo $f: V \to V$ è triangolabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto a cui f è rappresentato da una matrice triangolare superiore; in tal caso si dirà che la base $\mathcal{B}$ triangolarizza f.

Non esamineremo però le condizioni di triangolabilità.

Abbiamo detto che un autospazio relativo a un autovalore λ è definito come $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.
Risulta chiaro, e l'abbiamo già accennato, che $V_0 = \operatorname{Ker} f$, dove f è l'endomorfismo $f: V \to V$.
Infatti: $V_0 = \{v \in V : f(v) = 0 \cdot v\} = \{v \in V : f(v) = 0\}$: tutti i vettori mandati in 0 dall'applicazione formano il nucleo di f.
Vediamo ora di esprimere un generico autospazio V_λ come nucleo di una qualche applicazione lineare.
Consideriamo tutti i vettori $v \in V$ tali che $f(v) = \lambda v$.
Riscriviamo l'uguaglianza come $f(v) - \lambda v = 0$ e, per fare in modo che compaia un'applicazione lineare ad ognuno dei due termini, applich~~costitu~~iamo al vettore v l'~~applicazione~~ identità id (si verifica che $id(v) = v$)
Dunque scriviamo $f(v) - \lambda \cdot id(v) = 0$; se riuscissimo a scrivere a primo membro un'unica applicazione su ogni vettore v, potremmo concludere che l'autospazio V_λ è il nucleo di tale applicazione. ~~Utilizzando la omogeneità delle applicazioni lineari, r~~Riscriviamo l'uguaglianza come $f(v) - (\lambda \cdot id)(v) = 0$ e~~, utilizzando l'additività riscriviamo~~ ancora come $(f - \lambda \cdot id)(v) = 0$.
Abbiamo trovato che $V_\lambda = \{v \in V : (f - \lambda \cdot id)(v) = 0\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)$

Avevamo già detto che λ è un autovalore di $f: V \to V$ se $V_\lambda \neq \{0\}$ e dunque se $\dim V_\lambda = \dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)) \neq 0$.
Il teorema della dimensione ci dice anche che, data $\dim V = n$,
$\dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)) \neq 0 \Leftrightarrow rk(f - \lambda \cdot id) \neq n$; tale rango, come avevamo già visto, è uguale in tutte le matrici associate a f rispetto a qualsiasi base.
In particolare $rk\ \left({}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot id)_{\mathcal{B}}\right) = rk(f - \lambda \cdot id) \quad \forall\ \mathcal{B}$ base di V.

Dato che la somma (o differenza) di due applicazioni lineari rispetto a due basi è uguale alla somma (o differenza) delle due applicazioni espresse singolarmente rispetto alle due basi,
troviamo che $rk\ ({}_{\mathcal{B}}(f-\lambda\cdot id)_{\mathcal{B}}) = rk\ ({}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} - \lambda\cdot{}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}})$.
Inoltre, dato che ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{B}} = I_n$ (è la matrice di cambiamento di base di se stessa), abbiamo trovato che λ è un autovalore di $f: V \to V$ se e solo se $rk\ ({}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} - \lambda\cdot I_n) \neq n$; dal momento che stiamo parlando di matrici quadrate (gli endomorfismi hanno tutte le matrici associate quadrate), sappiamo che il rango di una matrice quadrata di ordine *n* è diverso da *n* se e solo se la matrice stessa è singolare.
Dunque

> $\lambda \in \mathrm{K}$ è un autovalore dell'endomorfismo $f: V \to V$, con *V* spazio vettoriale di dimensione finita ~~definito~~ sul campo K, se e solo se
> $$\det(A-\lambda I_n)=0,$$
> dove *A* è la matrice (quadrata) associata a *f* rispetto a due basi (uguali) qualsiasi.

<u>Esempi</u>
Data la matrice $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$, troviamo il determinante $\det(A-\lambda I_n)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&0\\0&3-\lambda\end{pmatrix}=$
$=(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$, che vale 0 se $\lambda=2 \vee \lambda=3$, che sono proprio gli autovalori dell'applicazione associata ad *A*.

Data la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ troviamo $\det(A-\lambda I_n)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1$, che non si annulla per nessun $\lambda \in \Re$.
Avevamo già studiato questi esempi, e i risultati sono gli stessi.

IL POLINOMIO CARATTERISTICO

Abbiamo trovato un importante relazione:

> Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale *V* di dimensione finita sul campo K. Fissiamo una base di *V* $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$, e sia *A* la matrice che rappresenta *f* rispetto a $\mathcal{B}$. Allora si ha:
>
> - la funzione $p: \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ data da
> $$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$$
> è detta *polinomio caratteristico* di *f* e <u>non dipende dalla base $\mathcal{B}$ scelta</u>.
> - $p(\lambda)$ è un polinomio di grado *n* in cui il coefficiente direttivo è $(-1)^n$, il termine noto è $\det A$ e il coefficiente di λ^{n-1} è $(-1)^{n-1}\cdot \mathrm{tr}A$, dove la *traccia* $\mathrm{tr}A$ della matrice *A* è la somma degli elementi sulla diagonale.
> - $\lambda_0 \in \mathrm{K}$ è autovalore di *f* se e solo è una radice del polinomio *p*, ossia ~~se~~ $p(\lambda_0)=0$.

<u>Dimostrazione</u>

Dimostriamo innanzitutto che il polinomio caratteristico non dipende dalla base di V scelta. Ossia deve valere la relazione det $({}_{\mathfrak{B}}f_{\mathfrak{B}} - \lambda \cdot I_n)$ = det $({}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{C}} - \lambda \cdot I_n)$ $\forall\ \mathfrak{B}, \mathcal{C}$ basi di V.

Usando la formula del cambiamento di base, esprimiamo ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{C}}$ come ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}id_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}f_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}id_{\mathcal{C}}$ ovvero ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{C}} = ({}_{\mathfrak{B}}id_{\mathcal{C}})^{-1} \cdot {}_{\mathfrak{B}}f_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}id_{\mathcal{C}}$

Per semplicità di notazione, poniamo ${}_{\mathfrak{B}}f_{\mathfrak{B}} = B$ e ${}_{\mathfrak{B}}id_{\mathcal{C}} = M$

Dunque dimostriamo che $\det(B - \lambda I_n) = \det(M^{-1} \cdot B \cdot M - \lambda I_n)$

Non è possibile semplificare M^{-1} e M al secondo membro, perché non sono vicine di posizione, e sappiamo che il prodotto tra matrici non è commutativo.

Riscriviamo il secondo membro come $\det(M^{-1} \cdot B \cdot M - \lambda I_n) = \det(M^{-1} \cdot B \cdot M - \lambda(M^{-1} \cdot I_n \cdot M))$

Ora, per ~~la~~ una proprietà ~~distributiva~~ del prodotto tra matrici, scriviamo $\det(M^{-1} \cdot B \cdot M - \lambda(M^{-1} \cdot I_n \cdot M)) = \det(M^{-1} \cdot B \cdot M - M^{-1}(\lambda I_n)M)$;

per la proprietà distributiva

adesso la differenza è esprimibile come $\det(M^{-1}(B - \lambda I_n)M)$, un determinante di due prodotti.

Adesso possiamo applicare il teorema di Binet e scrivere

$\det M^{-1} \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det M = \dfrac{1}{\det M} \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det M = \det(B - \lambda I_n)$, proprio come volevamo.

Abbiamo definito la funzione $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, ossia il determinante di una matrice del tipo

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix};$$

Quindi $p(\lambda)$ contiene solo somme e prodotti di costanti e di λ, per cui è un polinomio in λ.

Inoltre, siccome nel calcolo del determinante ogni elemento della matrice interviene al più una volta sola in ogni singolo addendo ~~di uno sviluppo di Laplace~~, e nella matrice $A - \lambda I_n$ ~~il parametro~~ l'indeterminata λ compare solo in n elementi (quelli diagonali), ne segue che $p(\lambda)$ ha al più grado n.

In particolare il grado n sarà ricavabile considerando il prodotto degli elementi diagonali della matrice, ossia gli unici in cui compare ~~il parametro~~ l'indeterminata: $\prod_{j=1}^{n}(a_{jj} - \lambda)$.

Allora il polinomio sarà definito da $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(a_{jj} - \lambda) +$ termini di grado al più $n-1$.

Si vede facilmente che il termine di grado più alto sarà dato dal prodotto dei singoli λ presenti nel primo addendo. In particolare, a essere moltiplicati n volte saranno i ~~parametri cambiati di segno~~ $-\lambda$. Allora il termine di grado più alto del polinomio $p(\lambda)$ sarà $(-\lambda)^n$, il cui coefficiente (detto *direttivo*) è $(-1)^n$, come volevamo.

Il termine noto di un polinomio (ossia quello di grado 0) è dato dal~~la funzione~~ valore $p(0)$, ossia il polinomio nel caso in cui $\lambda = 0$; si vede subito che $p(0) = \det(A - 0 I_n) = \det A$.

Il termine a_{n-1} (il secondo di grado più grande, se vogliamo) è pari a $(-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tr}A$,

dove $\mathrm{tr}A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ è la somma degli elementi diagonali

<u>Esempi</u>

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda)=(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$

Notiamo che il coefficiente direttivo è $(-1)^2=1$, il coefficiente del secondo termine è $(-1)^1\cdot \mathrm{tr}A=(-1)\cdot 5=-5$ e il termine noto è $\det A=6$.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda+4$

Il coefficiente direttivo è $(-1)^3=-1$, il coefficiente del secondo termine è $(-1)^2\cdot \mathrm{tr}A=1\cdot 4=4$ e il termine noto è $\det A=4$.

Si definisce *molteplicità algebrica* di un autovalore λ_0 il numero di volte che il fattore $(\lambda-\lambda_0)$ compare nella fattorizzazione massimale di $p(\lambda)$. Si indica con $m_a(\lambda_0)$.

In altri termini, la molteplicità algebrica di un autovalore λ_0 è l'esponente del fattore $(\lambda-\lambda_0)$ nella fattorizzazione massimale del polinomio caratteristico.

Ad esempio, nella matrice $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, il cui polinomio caratteristico associato è $(3-\lambda)^2$, l'autovalore $\lambda_0=3$ ha molteplicità algebrica $m_a(3)=2$.

$$\underline{\forall\ \lambda \text{ autovalore di } f \quad 1\le m_g(\lambda)\le m_a(\lambda)}$$

Se consideriamo i k autovalori ~~(non sono n perché alcuni possono ripetersi)~~ dell'applicazione f: $\lambda_0,\ldots,\lambda_k$

l'ultima relazione ci dice che $\begin{cases}1\le m_g(\lambda_{\cancel{0}\,1})\le m_a(\lambda_{\cancel{0}\,1})\\ \ldots\\ 1\le m_g(\lambda_k)\le m_a(\lambda_k)\end{cases}$; sommando i termini di ogni colonna otteniamo

che $k\le\sum_{j=1}^{k}m_g(\lambda_j)\le\sum_{j=1}^{k}m_a(\lambda_j)$, che ci dice che il grado del polinomio

$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_{\cancel{0}\,1})^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ + altri termini non fattorizzabili ulteriormente è dato da $\deg(p(\lambda))=m_1+\ldots+m_k+r$, dove r è il grado complessivo dei termini non fattorizzabili.

Allora $\underline{\sum_{j=1}^{k}m_a(\lambda_j)\le\deg(p(\lambda))}$

Avevamo già detto che una condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione lineare fosse diagonalizzabile era $\sum_{j=1}^{k}m_g(\lambda_j)=n$

Una condizione solamente sufficiente è che $\underline{k=n}$, ossia il numero di autovalori ~~deve essere~~ sia uguale alla dimensione n di V (dominio di f)

Il seguente schema riassume tutte le condizioni affinché un endomorfismo *f* sia diagonalizzabile

$$f \quad diagonalizzabile$$
$$\Updownarrow$$
$$\left.\begin{matrix} k = n & \Longrightarrow \\ f \quad simmetrica & \Longrightarrow \end{matrix}\right. \cancel{\rightarrow} \sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j) = n \\ \forall \; j = 1 \ldots k \quad m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j) \end{cases}$$

Un endomorfismo è diagonalizzabile *se e solo se* la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è pari alla dimensione di *f*.
Se il numero di autovalori è pari alla dimensione di *f*, oppure se *f* è endomorfismo simmetrico (sulla definzione di simmetria di un endomorfismo *cfr*. più avanti), allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è pari alla dimensione di *f*, e dunque *f* è diagonalizzabile (<u>condizioni sufficienti per la diagonalizzabilità</u>);
Se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è pari alla dimensione di *f*, allora anche la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è pari a tale dimensione, e inoltre ogni autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali (<u>condizioni necessarie per la diagonalizzabilità</u>).

Vediamo di dimostrare le implicazioni:

I. $k = n \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n$

Ricordiamo che vale sempre la relazione $1 \le m_g(\lambda_j) \le m_a(\lambda_j) \quad \forall \; j = 1 \ldots k$, da cui si ricava, sommando termine a termine considerando tutte le disuguaglianze fino a *k*, la relazione

$k \le \sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) \le \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j) \le n$, dove *n* è il grado del polinomio $p(\lambda)$;

ma se $k = n$, ossia i termini estremi delle disuguglianze sono uguali, allora deve essere vero anche che
tutti
i termini ~~mediani~~ sono uguali tra loro. In particolare, $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n$.

II. $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j) = n \\ \forall \; j = 1 \ldots k \quad m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j) \end{cases}$

Questa implicazione deriva dalla considerazione appena fatta: ~~il fatto che la somma delle molteplicità geometriche sia pari a *n* deriva dal fatto che il numero di autovalori *k* sia uguale proprio ad *n* (come abbiamo appena dimostrato). Dunque~~ se la catena di disuguaglianze è in realtà una catena di uguaglianze (ossia $\cancel{k =} \sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j) = n$) ne consegue che $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = n = \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j)$.

Inoltre, se $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j)$, ma in generale $m_g(\lambda_j) \le m_a(\lambda_j) \quad \forall \; j = 1 \ldots k$, questo vuol dire (è l'unica possibilità) che le molteplicità geometriche e algebriche sono identiche per ogni λ_j.

Esempi di falsità delle implicazioni inverse

1. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; la matrice è diagonalizzata (e dunque era diagonalizzabile), eppure $k=1\neq n=2$.

Il fatto che un endomorfismo *f* sia diagonalizzabile non implica che il numero di autovalori sia pari alla dimensione di *f*.

2. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; qui $\sum_{j=1}^{k} m_g(\lambda_j)=0$ e $n=2$, quindi l'applicazione associata non è diagonalizzabile. Eppure si verifica che $m_g(\lambda_j)=0=m_a(\lambda_j)$: il fatto che le molteplicità ~~geomet~~algebriche e geometriche siano tutte uguali non implica che l'applicazione sia diagonalizzabile.

PROCEDIMENTO DI DIAGONALIZZAZIONE di un endomorfismo

Vediamo ora come concretamente diagonalizzare un'applicazione lineare mediante il calcolo degli autovalori. Proponiamo prima i passaggi del procedimento, e poi vediamo un esempio.

Data una matrice *A* quadrata di ordine *n* associata a un endomorfismo $f: V\to V$ rispetto a una base $\mathscr{C}$ di V:

1. Si calcoli il polinomio caratteristico associato $p(\lambda)$; trovati i *k* autovalori $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, si verifichi una condizione di diagonalizzabilità (è sufficiente, ad esempio, che $k=n$).
2. Si trovino dimensioni e basi $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ degli autospazi relativi agli autovalori trovati: ossia, $\forall\ j=1\dots k$, si si calcoli $\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I_n)$ mediante la risoluzione dei sistemi lineari omogenei $(A-\lambda_j I_n)x=0$, le cui soluzioni saranno l'espressione in base $\mathscr{C}$ di tali autovettori.
3. Si uniscano le *k* basi trovate in un'unica base $\mathcal{B}=\bigcup_{j=1}^{k}\mathcal{B}_{\lambda_j}$; se f è diagonalizzabile tale base sarà la base diagonalizzante di *f*; la matrice diagonalizzante *M* di cambio di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$ è la matrice avente per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in base $\mathscr{C}$.
4. Si verifichi la correttezza dei calcoli risolvendo $MD=AM$, dove *D* è la matrice diagonale che ha per elementi diagonali gli autovalori relativi ad *A* già trovati, scritti ~~in un ordine qualsiasi purché sia lo stesso usato durante tutto il procedimento.~~ nello stesso ordine dei corrispondenti vettori di $\mathscr{B}$.

Esempio

Data $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ matrice associata all'applicazione $f: V \to V$; verificare che *f* sia diagonalizzabile e diagonalizzarla.

Iniziamo calcolando il polinomio caratteristico $p(\lambda)=(-\lambda-1)\cdot\left((1-\lambda)^2-1\right)=-(\lambda+1)\cdot\left(\lambda^2-2\lambda\right)$

Il polinomio si annulla per $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=0$: questi sono gli autovalori di *f*.

Si verifica che $k=3=n$, dunque *f* è diagonalizzabile. Inoltre le molteplicità algebriche degli autovalori sono $m_a(-1)=m_a(2)=m_a(0)=1$.

Possiamo dedurre subito che anche tutte le molteplicità geometriche sono =1.

Calcoliamo ora dimensione e base degli autospazi relativi ai tre autovalori trovati.

Troviamo $V_{-1}=\operatorname{Ker}(A+I_3)$ $\quad V_2=\operatorname{Ker}(A-2I_3)$ $\quad V_0=\operatorname{Ker}(A)$

Per trovare tali nuclei, risolviamo i sistemi lineari omogenei

$V_{-1}=\operatorname{Sol}(A+I_3,0)$ $\quad V_2=\operatorname{Sol}(A-2I_3,0)$ $\quad V_0=\operatorname{Sol}(A,0)$

$$(A+I_3,0)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \operatorname{Sol}(A+I_3,0)=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1/2\\ 3/2\\ 1\end{pmatrix}=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$(A-2I_3,0)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \operatorname{Sol}(A-2I_3,0)=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(A,0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \operatorname{Sol}(A,0)=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Le dimensioni dei tre autospazi (e dunque le molteplicità geometriche degli autovalori) sono $\dim V_{-1}=\dim V_2=\dim V_0=1$; si verifica che $\sum_{j=1}^{3} m_g(\lambda_j)=3=\sum_{j=1}^{3} m_a(\lambda_j)$

Le basi dei tre autospazi sono $\mathcal{B}_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{B}_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{B}_0=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

La base diagonalizzante di *f* sarà data da $\mathcal{B}=\bigcup_{j=1}^{3}\mathcal{B}_{\lambda_j}$ e dunque $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

Verifichiamo che $MD=AM$, con $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

In effetti (non riportiamo i calcoli) l'uguaglianza è verificata.

APPLICAZIONI LINEARI SIMMETRICHE

Sia V uno spazio vettoriale metrico su $\mathrm{K} = \Re$ e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare su *V*.

$\boxed{f \text{ si dice simmetrica se } \forall\ v, w \in V \quad f(v) \cdot w = v \cdot f(w)}$

f *simmetrica* $\Leftrightarrow \forall\ \mathcal{B}$ base <u>ortonormale</u> di V si ha che ${}_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{B}}$ è matrice simmetrica

Ad esempio, se $V = \Re^n$, f è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico se e solo se ${}_{\mathcal{E}} f_{\mathcal{E}}$ è simmetrica (infatti $\mathcal{E}_n$ è base ortonormale)

Ora vediamo l'enunciato e una parte della dimostrazione di un importante teorema dell'algebra lineare, noto come *teorema spettrale* (si definisce lo spettro di *f* $\mathrm{sp}(f)$ come l'insieme degli autovalori di *f*) :

TEOREMA SPETTRALE

Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare (in particolare un endomorfismo) di uno spazio vettoriale metrico *V*. Allora f è simmetrica se e solo se è diagonalizzabile su base ortonormale, ovvero esiste una base ortonormale di *V* composta da autovettori di *f*.

Dimostriamo che se λ_1, λ_2 sono autovalori distinti di *f* applicazione lineare <u>simmetrica</u> e v_1, v_2 sono rispettivi autovettori allora $v_1 \perp v_2$ (che è una delle informazioni che fornisce il teorema)

Sappiamo per ipotesi che $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $f(v_2) = \lambda_2 v_2$; inoltre che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e che $v_1, v_2 \neq 0$ (quest'ultima condizione deriva dalla definizione di autovettore).
Dobbiamo dimostrare che $v_1 \cdot v_2 = 0$ (condizione di ortogonalità)

Poiché *f* è un'applicazione lineare simmetrica possiamo dire che $f(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot f(v_2)$;
se sostituiamo in questa equazione i valori che conosciamo otteniamo $\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot \lambda_2 v_2$, ossia $\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2)$.
Portando tutto a primo membro e mettendo in evidenza il termine comune $(v_1 \cdot v_2)$, otteniamo:
$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$; ora, per la legge di annullamento del prodotto l'equazione è verificata se e solo se $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ oppure se $v_1 \cdot v_2 = 0$.
Ma per ipotesi abbiamo detto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e dunque l'uguaglianza $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ non è mai vera.

Allora il prodotto si annulla solo nel caso in cui $v_1 \cdot v_2 = 0$, che è quello che volevamo.

Diagonalizzazione di una forma bilineare

Vediamo ora come diagonalizzare una forma bilineare, necessariamente simmetrica. In effetti il procedimento è del tutto simile a quello per la diagonalizzazione di applicazioni lineari.

~~Data u~~ Una matrice A associata a una forma bilineare b rispetto a una base $\mathcal{C}$ simmetrica è anch'essa simmetrica. Si ~~si~~ consideri l'applicazione lineare f associata alla stessa matrice A rispetto alla base $\mathcal{C}$. Dotiamo V del prodotto scalare rappresentato in base $\mathcal{C}$ dalla matrice identità; per costruzione $\mathcal{C}$ è ortonormale ed f è simmetrica, quindi ~~Se consideriamo la forma bilineare del prodotto scalare canonico, possiamo dire con certezza che A è una matrice simmetrica. Se A è simmetrica vuol dire che f~~ è diagonalizzabile rispetto a una base ortonormale $\mathcal{B}$ (questo ce lo dice il teorema spettrale).
Tale base ortonormale che diagonalizza f è anche la base che diagonalizza b.
Per ottenerla, è sufficiente trovare una base che diagonalizza f ~~, che in generale sarà ortogonale,~~ e poi ortonormalizzarla mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Si può dimostrare, infatti, che una base ~~ortogonale~~ diagonalizzante ~~, se normalizzata,~~ un'applicazione simmetrica, se ortonormalizzata, rimane una base diagonalizzante.

Il fatto che per ricavare la base che diagonalizza una forma bilineare associata a una matrice A sia sufficiente ortonormalizzare la base che diagonalizza l'applicazione lineare associata alla stessa A appare più chiaro se si confrontano le formule di cambiamento di base di applicazioni lineari e forme bilineari, rispettivamente: (nel resto del paragrafo sostituire $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{E}$)

$${}_{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}} = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}^{-1} \cdot {}_{\mathcal{E}} f_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} \qquad \text{cambiamento di base per applicazioni lineari}$$

$${}_{\mathfrak{B}} b_{\mathfrak{B}} = {}^{t}{}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathcal{E}} b_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} \qquad \text{cambiamento di base per le forme bilineari}$$

Le due formule corrispondono solo nel caso in cui ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}^{-1} = {}^{t}{}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$, ossia se ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$ è una matrice ortogonale. Questo è vero, dal momento che $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi ~~è una base~~ ortonormali.

FORME QUADRATICHE
A una forma bilineare <u>simmetrica</u> $b: V \times V \to \mathfrak{R}$ è associata la *forma quadratica* $q: V \to \mathfrak{R}$ data da

$$q(v) = b(v,v) \quad \forall v \in V$$

Ossia una forma quadratica è una forma bilineare applicata sullo stesso vettore.

Ad esempio, se $b(v,w) = v \cdot w$ è il prodotto scalare canonico, la forma quadratica associata $q(v)$ è pari al quadrato della norma del vettore su cui è applicata : $q(v) = \|v\|^2$ (infatti $b(v,v) = \|v\|^2$)

È possibile ricavare la forma bilineare b a partire dalla forma quadratica q associata mediante le formule di polarizzazione già viste nello spazio $\mathfrak{R}^n$:

$$b(v,w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \quad ; \quad b(v,w) = \frac{q(v+w) - q(v-w)}{4}$$

Sullo spazio $V=\Re^n$ una forma quadratica è espressa dalla somma di $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ termini, di cui n quadrati~~ci~~ di coordinate (ossia con esponente 2) e i rimanenti $\frac{n(n-1)}{2}$ ~~lineari~~ prodotti di coordinate diverse.

In generale, una forma quadratica del tipo $q(v)$ con $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}\in\Re^n$ si può esprimere come

$$q(v)=\sum_{j=1}^{n}a_j v_j^{\,2}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}b_{ij}v_iv_j\ ,\ \text{con } a_1,\ldots,a_n,\cancel{b_1,\ldots,}b_{ij}\ \text{coefficienti reali}$$

Ad esempio, in $\Re^3$, una forma quadratica sarà espressa come

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_{12}xy+b_{13}xz+b_{23}yz$$

Matrice associata a una forma quadratica

Vediamo come ricavare una matrice associata a una forma quadratica, facendo riferimento al solo caso $\Re^3$. Ciò non toglie che il procedimento sia applicabile a qualsiasi spazio $\Re^n$.

Data una forma quadratica del tipo $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_{12}xy+b_{13}xz+b_{23}yz$, la sua matrice associata si costruisce come $A=\begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_{12}}{2} & \frac{b_{13}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & a_2 & \frac{b_{23}}{2} \\ \frac{b_{13}}{2} & \frac{b_{23}}{2} & a_3 \end{pmatrix}$; ossia sulla diagonale vanno inseriti i coefficienti dei ~~termini~~ quadrati~~ci~~, e negli altri spazi la metà dei coefficienti degli altri $\frac{n(n-1)}{2}$ addendi.

Va notato che ~~il~~ la metà del termine b_{12}, ossia il coefficiente del prodotto v_1v_2 (in questo caso $v_1=x$, $v_2=y$) va in posizione A_{12} e A_{21} (la matrice è simmetrica dal momento che le forme quadratiche sono associate solo a forme bilineari simmetriche); in generale, ~~il~~ la metà del coefficiente b_{ij} andrà in posizione A_{ij} e A_{ji} $\forall\, i=1\ldots n-1$, j=2,…,n, i≤j.

<u>Esempio</u>

La matrice associata a $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-x^2+4z^2+3xy+4yz$ è $A=\begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

La forma bilineare associata sarà $b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}xy'+\frac{3}{2}x'y-xx'+4zz'+2yz'+2y'z$

Segnatura di una forma bilineare

Abbiamo già parlato di segnatura di una forma bilineare simmetrica b. L'avevamo definita come la terna di numeri naturali (n_+, n_-, n_0) che specifica il numero di elementi positivi, negativi e nulli presenti sulla diagonale di una ~~base~~ matrice associata A diagonal~~izzant~~e. Tale concetto è applicabile solo alle forme bilineari simmetriche ed è utile per determinare ad esempio se un prodotto scalare è definito positivo semplicemente guardandone la matrice associata. Un errore comune è quello di calcolare la segnatura di una forma bilineare basandosi su una matrice associata non diagonalizzata. È importante che la matrice sia diagonalizzata, perché la segnatura è collegata direttamente agli autovalori di ~~b~~ A dal seguente teorema:

> Sia ~~$b(v,w)$ un prodotto scalare~~ una forma bilineare simmetrica reale su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e A la matrice che lo rappresenta rispetto a una base $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ di V. Allora b~~(v,w)~~ è definito positivo se e solo se tutti gli autovalori di A ~~$b:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$~~ sono positivi.

Più in generale, il teorema di Sylvester ci dice che il *segno* (ma non il valore) degli autovalori di ~~b~~ A è una caratteristica intrinseca del prodotto scalare e non dipende dalla base scelta diagonalizzante.

Dato che non è importante il valore degli autovalori ma il loro segno, e dato che spesso non è agevole calcolarli (nel caso di polinomi caratteristici di grado superiore al ~~terzo, soprattutto~~ secondo), è possibile conoscere solamente il segno di tali autovalori semplicemente guardando i coefficienti del polinomio caratteristico. Per far ciò, si fa riferimento al cosiddetto *criterio di Cartesio.*

CRITERIO DI CARTESIO

> Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_jx^j + \dots + a_nx^n$ un polinomio di grado n a coefficienti reali.
> Allora:
> 1) 0 è una radice di $p(x)$ se e solo se $a_0 = 0$; in tal caso è una radice di molteplicità $\min\{j : a_j \neq 0\}$
> 2) Il numero di radici positive di p, contate con relativa molteplicità, è pari al numero di variazioni di segno nella successione dei coefficienti, eventualmente diminuito di un numero pari.

Questo criterio fornisce un modo semplice per calcolare la segnatura di una forma bilineare. È da notare che, nel caso di polinomi che abbiamo *solamente radici reali* (e quindi non complesse) il numero di radici positive del polinomio è *esattamente* il numero di variazioni di segno dei coefficienti. Tale numero ~~va~~ può essere diminuitio di un numero pari solo nel caso di possibile presenza di radici complesse.

Poiché un polinomio caratteristico di applicazione diagonalizzabile ha sicuramente tutte radici reali (perché $\sum_{j=1}^{k} m_a(\lambda_j) = n$) il criterio di Cartesio fornisce la risposta esatta nel calcolo degli autovalori positivi di un'applicazione. simmetrica

Osservazione: il numero di radici negative di *p non* è il numero delle permanenze di segno. Esso si trova sottraendo al grado del polinomio il numero delle radici positive e nulle.

Esempi

Dato il polinomio $p(\lambda)=\lambda^4-1$, calcolare il numero di radici positive.

~~Poiché~~ Anche se p possiede due radici non reali complesse (si può osservare dalla fattorizzazione) il criterio di Cartesio ~~non~~ fornisce comunque il ~~alcuna sicurezza sul~~ numero di radici positive. che è =1 perché c'è una variazione.

In ogni caso, p non può essere un polinomio caratteristico di applicazione diagonalizzabile su $\Re$.

Il polinomio caratteristico di un'applicazione diagonalizzabile $p(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda$ presenta due variazioni di segno (tra il primo e secondo coefficiente e tra il secondo e il terzo), dunque possiamo dire che ha esattamente 2 radici positive; inoltre presenta 1 radice nulla (si osserva dal grado più basso) e, quindi, non avrà alcuna radice negativa. La segnatura della forma bilineare associata sarà $(2,1,0)$.

Esempio di diagonalizzazione in $\mathbb{C}$ di applicazioni lineari

Riprendiamo ora l'esempio della matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, che avevamo presentato come esempio di matrice non diagonalizzabile su $\Re$. Infatti il suo polinomio caratteristico, $p(\lambda)=\lambda^2+1$, non ha nessuna radice reale. Proviamo ora a diagonalizzare A sul campo dei numeri complessi $K=\mathbb{C}$.

Il polinomio p è fattorizzabile su $\mathbb{C}$ come $p(\lambda)=(\lambda+i)\cdot(\lambda-i)$; dunque gli autovalori sono

$\lambda_1=i \quad \lambda_2=-i \quad$ con $\sum_{j=1}^{2} m_a(\lambda_j)=2=n=\sum_{j=1}^{2} m_g(\lambda_j)$.

Troviamo i nuclei delle applicazioni associate alle matrici $A-iI_2$ e $A+iI_2$:

$$\mathrm{Sol}(A-iI_2) = \mathrm{Sol}\begin{cases}-ix-y=0\\ x-iy=0\end{cases} = \left\{\begin{pmatrix}iy\\ y\end{pmatrix}, y\in\mathrm{C}\right\}=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sol}(A+iI_2) = \mathrm{Sol}\begin{cases}ix-y=0\\ x+iy=0\end{cases} = \left\{\begin{pmatrix}-iy\\ y\end{pmatrix}, y\in\mathrm{C}\right\}=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}$$

La base diagonalizzante è quindi $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

SOTTOSPAZI AFFINI DI $\Re^n$ - equazioni cartesiane e parametriche

Riprendiamo il concetto di sottospazio affine ~~associato a~~ di uno spazio vettoriale. Ricordiamo che S si dice sottospazio affine ~~di~~ associato a uno spazio vettoriale S_0 se per un qualche vettore v_0 di V si ha che $S = v_0 + S_0$. Ora concentriamoci sul caso $V = \Re^n$.
Supponiamo che S sia un sottospazio affine associato a S_0, che $\dim S = \dim S_0 = k$ sia la dimensione di entrambi gli spazi, e che $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_k\}$ sia una base di S_0.
S può essere espresso in due forme fondamentali: mediante *equazioni parametriche*, che prevedono la conoscenza di un punto di S e della sua "direzione nello spazio" ; e mediante *equazioni cartesiane*, che si presentano sottoforma di un sistema di equazioni.
Vedremo solamente il caso di sotto spazi di ~~dimensione 3~~ $\mathbb{R}^3$.

Se $A \in M_{\cancel{m}\times 3}(\Re)$ (3-k) e $b \in \Re^{\cancel{m}}$ 3-k (ove rk A=3-k), diremo che $Ax = b$ è una *equazione cartesiana* per $\mathrm{Sol}(A,b)$. La dimensione di $\mathrm{Sol}(A,b)$ è $3 - rk(A)$ =k, è il sottospazio vettoriale di giacitura di $\mathrm{Sol}(A,b)$ è lo spazio ~~V~~ delle soluzioni del sistema omogeneo $\mathrm{Sol}(A,0)$.

~~Di solito si scelgono le equazioni cartesiane in modo~~ Dato che $rk(A) =$ ~~n, cioè in modo che~~ numero di righe, non vi s~~i~~oano equazioni inutili ~~(ciò vuol dire che il sistema $Ax = b$ ha soluzione qualunque sia b)~~

Vediamo le equazioni cartesiane di rette e piani nello spazio:

- $ax + by + cz = d$ rappresenta un piano in $\Re^3$, ammesso che la matrice $A = (a\ b\ c)$ abbia rango 1. I coefficienti a, b, c si dicono *parametri di giacitura* del piano. Tali parametri non sono univocamente determinati; l'equazione $(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = (\lambda d)$ identifica lo stesso piano qualunque sia $\lambda \in \Re$ non nullo.

- $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ rappresenta una retta in $\Re^3$, ammesso che la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ abbia rango 2. In questo modo abbiamo rappresentato la retta come intersezione di due piani.

<u>Esempio</u>
$\begin{cases} x - 3z = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ è l'equazione cartesiana di una retta nello spazio. Infatti la dimensione del sottospazio affine $\mathrm{Sol}(A,b)$ è $3 - rk(A) = 3 - 2 = 1$.

Risolvendo il sistema $Ax = b$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo spazio delle soluzioni è dato da

$$\mathrm{Sol}(A,b) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{\mathrm{Span}}\ t\cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$ con $t\in\mathbb{R}$.

Se $P_0 \in \Re^3$ è un punto dello spazio e $\cancel{A}$ B $\in M_{3\times \cancel{n}}(\Re)$ ha rango k, diremo che $x = P_0 + \cancel{A}t$ B è un'*equazione parametrica*, al variare del parametro $t \in \Re^{\cancel{n}}$ k, per l'insieme dei punti *S*. Il sottospazio ~~P~~ S ha dimensione $rk(\cancel{A})$ B =k e il sottospazio vettoriale ~~V~~ S0 associato a S ha equazione parametrica $x = Bt$.

~~Anche le equazioni parametriche vengono scelte in modo~~ Dato che $rk(\cancel{A})$ B $= \cancel{n}$ k, ~~cioè in modo che~~ non ci s~~ia~~ono ~~equazioni~~ parametri inutili (ogni punto del sottospazio affine corrisponde ad uno e un solo valore dei parametri). Dunque il numero di parametri ~~dipende dalla~~ è la dimensione del sottospazio.

In generale, ~~dato $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ la sua~~ un' equazione parametrica sarà data da $v = v_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j v_j$, dove

$v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S$ è un punto del sottospazio affine e k è la dimensione di *S*.

- ~~In particolare invece, nel caso dello spazio $\Re^3$, dato un punto $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l~~ L'equazione parametrica di una retta (dimensione 1) dipenderà da un solo parametro e sarà data da

  $$v = v_0 + t \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$ o, equivalentemente, dal sistema $$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ al variare di $t \in \Re$;

  il vettore $\cancel{u}$ v1 $= \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ è detto *vettore direttore* della retta ed è diverso dal vettore nullo. Le tre coordinate *l*, *m* ed *n* si dicono *parametri direttori* della retta. Chiaramente, non sono univocamente determinati.

- Per quanto riguarda l'equazione parametrica di un piano (dimensione 2) essa dipenderà da due parametri e sarà data da:

  $$v = v_0 + s \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$ o, equivalentemente, dal sistema $$\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ z = z_0 + ns + n't \end{cases}$$
  al variare di $s, t \in \Re$.

  I vettori $\cancel{u}$ v1 $= \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\cancel{w}$ v2 $= \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ formano una base del sottospazio vettoriale S_0 e ~~sono detti valori di giacitura;~~ non sono unici (possono essere sostituiti da una qualunque altra base di S_0)

Vediamo ora come ottenere le equazioni parametriche avendo a disposizione quelle cartesiane e viceversa.

1. Per passare dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche di uno stesso sottospazio affine si risolve il sistema lineare $Ax = b$ dove A è la matrice formata dai coefficienti di giacitura e b è il vettore dei termini noti.

Esempio

$\pi : x - 3z = 4$ è l'equazione cartesiana di un piano π in $\Re^3$. Lo stesso piano espresso tramite equazioni parametriche dipenderà sicuramente da due parametri, dal momento che un piano ha dimensione 2.

Risolviamo il sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$; si trova che $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 3z+4 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \forall\, y, z \in \Re \right\}$ e dunque

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che è l'equazione parametrica di π, esprimibile anche come $\begin{cases} x = 4 + 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

2. Per passare dalle equazioni parametriche alle equazioni cartesiane di un sottospazio affine, si trova il complemento ortogonale $S_0^{\perp}$ del sottospazio vettoriale $S_0 = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ associato al sottospazio affine dato; il complemento avrà forma $S_0^{\perp} = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_{n-k})$ (ricordiamo che la somma delle dimensioni di ~~due~~ un sottospazi o ~~fra loro ortogonali~~ vettoriale e del suo complemento ortogonale è uguale alla dimensione dello spazio cui entrambi appartengono).
Le coordinate dei vettori linearmente indipendenti $w_1, \ldots, w_{n-k}$ trovati saranno i coefficienti di giacitura, mentre i termini noti $b_1, \ldots, b_{n-k}$ si troveranno ponendo $b_j = v_0 \cdot w_j \quad \forall\, j = 1 \ldots n-k$.

Esempio

Data la retta $r : \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 8t \\ z = -4 \end{cases}$ ossia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ troviamo le sue equazioni cartesiane.

Il complemento ortogonale del sottospazio vettoriale associato è dato dalle soluzioni di

$(-3 \quad 8 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, ossia $\mathrm{Span}\left(w_1 = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; i termini noti b_1, b_2 sono dati dal prodotto scalare $b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}$ e $b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$

Allora l'equazione cartesiana della retta r è $r : \begin{cases} \frac{8}{3}x + y = \frac{40}{3} \\ z = -4 \end{cases}$

Esistono anche degli algoritmi per effettuare le conversioni da equazioni parametriche a equazioni cartesiane (e viceversa) di rette e piani. Semplificano notevolmente i calcoli, dal momento che non prevedono la risoluzione di un sistema lineare.
Prima di proporli, però, descriviamo una nuova operazione applicabile a due vettori: abbiamo visto che il prodotto scalare, dati due vettori in entrata, resituisce un numero scalare, appunto. Esiste anche il *prodotto vettoriale* che, dati due vettori in entrata, restituisce un altro vettore. Tale prodotto è indicato con il simbolo $\wedge$ ed è una funzione del tipo $\wedge : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re^3$ (definita solo in $\Re^3$)

Prodotto vettoriale in $\Re^3$

Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \Re^3$ il loro prodotto vettoriale è così definito (operativamente):

$v \wedge w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ w_1 v_3 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - w_1 v_2 \end{pmatrix}$ o, per meglio ricordarlo, $v \wedge w = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$; si prendono cioè le matrici quadrate di ordine 2 scelte eliminando dalla matrice $((v)(w))$ la riga di posto uguale alla componente del vettore prodotto che si sta calcolando e ne se fa il determinante; nel caso della seconda componente, inoltre, tale determinante va cambiato di segno.(secondo la regola della scacchiera)

Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa né di quella associativa. È tuttavia distributivo.
Il prodotto vettoriale $v \wedge w$ è nullo e solo se se v e w sono vettori linearmente dipendenti. Inoltre il vettore $v \wedge w$ è tale che $v \wedge w \perp v, w$

Il prodotto vettoriale si può utilizzare per convertire un'equazione parametrica di un piano in un'equivalente equazione cartesiana.

Dato un piano $\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_0 + t \cdot v_1 + s \cdot v_2 \right\}$ si eseguono i seguenti passaggi:

- si calcola il prodotto vettoriale $v_1 \wedge v_2$ per ottenere un vettore w ortogonale a v_1 e v_2. w sarà il vettore ~~dei parametri direttori~~ del piano scritto in forma cartesiana.
- Per trovare il termine noto del piano, si esegue il prodotto scalare $b = v_0 \cdot w$.

<u>Esempio</u>

Dato il piano $\pi : \begin{cases} x = 1 - 2t + 3u \\ y = -4 + u \\ z = u - t \end{cases}$ si trova $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 5$

L'equazione cartesiana di π è dunque $\pi : x - y - 2z = 5$

Vediamo ora un breve algoritmo che consente di trovare un'equazione cartesiana di una retta espressa in forma parametrica e di trovare un'equazione parametrica di un piano espresso in forma cartesiana.

Il procedimento si baserà sulla ricerca di due vettori linearmente indipendenti e perpendicolari a un dato vettore ~~che, in generale, sarà il vettore dei parametri direttori del piano o della retta~~.

Dato un vettore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$, i 3 vettori che rispettano le seguenti caratteristiche sono tutti perpendicolari a v:

- i tre vettori hanno una componente nulla, ognuno in una posizione differente
- le rimanenti due componenti sono scambiate di posto, rispetto alla loro posizione in v
- una delle due componenti scambiate di posto (una a scelta) ha segno opposto a quello che aveva in v.

Ossia, i tre vettori perpendicolari a $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$ sono $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$

Da essi se ne possono scegliere due
~~Due vettori~~ linearmente indipendenti ~~w_1, w_2 estratti dal gruppo costituiranno i vettori dei parametri direttori del piano o della retta~~. I termini noti si troveranno, come al solito, ponendo $b_i = v_0 \cdot w_i \quad per \;\; i = 1,2$ nel caso in cui si parta da un'equazione parametrica di una retta~~; l'unico termine noto del piano, invece, sarà dato da una soluzione particolare dell'equazione cartesiana del piano~~.

<u>Esempio</u>

È dato il piano in forma cartesiana $\pi : x + 2y + 3z = 4$, con vettore direttore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; dei tre vettori perpendicolari a v $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, scegliamo (ad esempio) w_1, w_2 che sono linearmente indipendenti (in questo caso avremmo potuto scegliere qualsiasi coppia, dal momento che sono tutte linearmente indipendenti). Il vettore di traslazione ~~il termine noto b~~ è ricavabile trovando una soluzione particolare di π: ponendo, ad esempio, $y, z = 0$ troviamo che $x = 4$; dunque $\cancel{b}\; v_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora l'equazione parametrica del piano sarà data da $\pi : \begin{cases} x = 4 - 3s \\ y = -3t \\ z = 2t + s \end{cases}$

<u>Esempio 2</u> (retta: da equazione parametrica a equazione cartesiana)

È data la retta $r:\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4t \\ z = 5-2t \end{cases}$ con $v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Troviamo due vettori linearmente indipendenti e perpendicolari a v_1, scegliendoli dal gruppo

$w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; prendiamo w_1, w_2 e calcoliamo i termini noti b_1, b_2:

$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$.

L'equazione cartesiana della retta r è quindi $r:\begin{cases} 4x - y = 8 \\ 2x + z = 9 \end{cases}$

POSIZIONI RECIPROCHE DI PUNTI, RETTE e PIANI nello spazio

Parliamo ora delle posizioni reciproche in cui si possono trovare punti, rette e piani nello spazio $\Re^3$. Generalmente, nel confronto delle posizioni, si lavorerà per comodità sulle equazioni cartesiane per i piani e sulle equazioni parametriche per le rette.

- Punti e piani: un punto $P(x_0 \quad y_0 \quad z_0) \in \Re^3$ appartiene a un piano $\pi \subseteq \Re^3$ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione cartesiana $\pi : ax + by + cz = d$; ossia se e solo se è vera l'equazione $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$
- Punto – retta : analogamente, un punto $P(x_0 \quad y_0 \quad z_0) \in \Re^3$ appartiene a una retta $r \in \Re^3$ se e solo le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni cartesiane $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$
  ossia se e solo se sono vere entrambe le uguaglianze $\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = d \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = d' \end{cases}$.
- Piani e piani : due piani π, π_0 sono *incidenti* se si intersecano in una retta; *paralleli* se non si intersecano o coincidono, cioè sono lo stesso piano; *perpendicolari*, se si intersecano formando un angolo retto.

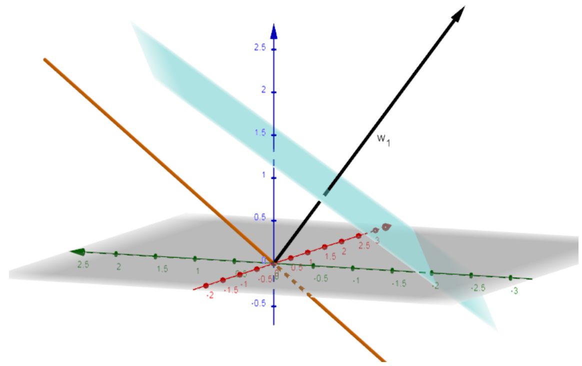
  1. $\pi // \pi_0$: due piani sono paralleli se i loro vettori direttori $w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $w_1' = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ sono

  ~~2.~~ linearmente dipendenti; ossia se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} = 1$ (*condizione di parallelismo*) ;

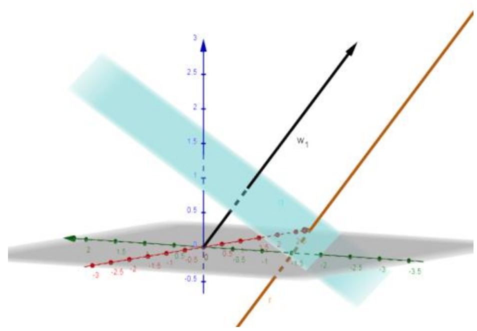
  2. in particolare i piani sono coincidenti se $rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \end{pmatrix} = 1$

  3. $\pi \perp \pi_0$: due piani sono perpendicolari se i vettori ad essi perpendicolari sono a loro volta perpendicolari tra loro; ossia se $w_1 \cdot w_1' = 0$.

- Rette e piani: siano $\pi: ax+by+cz=d$ e $r: v_0+tv_1$ un piano e una retta nello spazio e sia~~no~~ $w_1=(a \quad b \quad c)$~~, v_1 i loro vettori direttori~~.
  1. $r \,//\, \pi$: una retta e un piano sono paralleli se e solo se ~~i rispettivi vettori direttori sono perpendicolari tra loro; ossia se~~ $w_1 \cdot v_1 = 0$.
     In altri termini, la retta r e il piano π sono paralleli se il vettore diretore $v_1=(l \quad m \quad n)$ della retta appartiene al sottospazio di giacitura del piano, cioè se
     $\underline{al+bm+cn=0}$ (*condizione di parallelismo*)



  2. $r \perp \pi$: una retta e un piano sono perpendicolari se e solo ~~i rispettivi vettori direttori~~ $w_1=(a \quad b \quad c)$, $v_1=(l \quad m \quad n)$ sono linearmente dipendenti, ossia se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$.



  3. $r \subseteq \pi$: una retta è contenuta in un piano se vale la condizione di parallelismo e se si ha che $v_0 \in \pi$, il che accade se e solo se $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.
  4. $r \cap \pi$: una retta e un piano non paralleli si dicono incidenti. Il loro punto di incidenza è dato dalle coordinate x_0, y_0, z_0 che soddisfano l'equazione parametrica della retta v_0+tv_1 (con $v_0=(x_1 \quad y_1 \quad z_1)$ e $v_1=(l \quad m \quad n)$) dove il parametro t è soluzione dell'equazione lineare $a(x_1+tl)+b(x_2+tm)+c(x_3+tn)=d$.
     <u>Esempio</u>
     Data la retta $r: \begin{cases} x=t-1 \\ y=2+t \\ z=3-4t \end{cases}$, con ~~termine noto~~ $v_0=(-1 \quad 2 \quad 3)$ e vettore direttore $v_1=(1 \quad 1 \quad -4)$; la sua intersezione con il piano $\pi: x+y+z=6$ è data dalla soluzione dell'equazione in t : $t-1+2+t+3-4t=6$ che è vera per $t=-1$;

     il punto di intersezione sarà dato dunque da $P(-1-1 \quad 2-1 \quad 3+4)=P(-2, 1, 7)$.

- Rette e rette : Due rette $r: v_0 + tv_1$ e $r': v_0' + sv_1'$ sono *incidenti* se si intersecano in un punto; *parallele* se ~~non si intersecano ma~~ hanno vettori direttori paralleli (cioè linearmente dipendenti); in particolare, *coincidenti* se sono la stessa retta; e infine *sghembe* se non sono né incidenti né parallele ~~né coincidenti,~~ e dunque in particolare hanno vettori direttori linearmente indipendenti.
  1. $r // r'$ due rette sono parallele (o coincidenti) se e solo se i vettori direttori sono linearmente dipendenti, cioè $rk((v_1)\,(v_1'))=1$ (*condizione di parallelismo*)
  2. $r = r'$ sono coincidenti se, oltre ad essere parallele, si intersecano in un punto (in realtà in tutti i punti, ma per comodità ne consideriamo uno).

Due rette si intersecano in punto; se $P \in r \cap r'$, il punto *P* deve potersi scrivere sia come $v_0 + tv_1$ per un determinato valore di *t*, sia come $v_0' + sv_1'$, per un determinato valore di *s*. Quindi le due rette r, r' si intersecano se e solo se il sistema $v_0 + tv_1 = v_0' + sv_1'$ ovvero, scritto in maniera più riconoscibile $tv_1 - sv_1' = v_0' - v_0$, ammette soluzione. Dunque, per il teorema di Rouché-Capelli otteniamo:
$rk((v_1)(v_1')(v_0'-v_0)) = rk((v_1)(v_1')) = 1 \;\Rightarrow$ rette coincidenti
Se invece $rk((v_1)(v_1')(v_0'-v_0)) = 2$, le rette sono parallele ~~(perché il terzo vettore è combinazione lineare degli altri due). In particolare, dato che il rango della matrice $((v_1)(v_1')(v_0'-v_0))$ non è massimo, due rette son~~o incidenti ~~se e solo se $\det((v_1)(v_1')(v_0'-v_0)) = 0$~~;
invece, se il rango è massimo, i tre vettori sono linearmente indipendenti e dunque le due rette sono sghembe.
Riassumiamo il tutto in uno schema:

	$rk((v_1)(v_1')(v_0'-v_0))=1$	$rk((v_1)(v_1')(v_0'-v_0))=2$	$rk((v_1)(v_1')(v_0'-v_0))=3$
$rk((v_1)(v_1'))=1$	Rette coincidenti	Rette parallele	*Impossibile*
$rk((v_1)(v_1'))=2$	*Impossibile*	Rette incidenti	Rette sghembe

Vediamo ora alcuni esercizi sulla geometria nello spazio $\Re^3$.

Equazione di una retta passante per due punti *P* e *Q*
Dati due punti distinti $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x_1, y_1, z_1)$ l'equazione della retta passante per i due punti è ottenuta ponendo come termine noto *P* o *Q* (vanno bene entrambi) e come vettore direttore la differenza tra i due punti $Q - P \neq 0$; ossia la retta avrà equazioni parametriche $r: \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$

Equazione di un piano passante per tre punti non allineati
L'equazione di un piano passante per tre punti $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ e $R(x_2, y_2, z_2)$ è del tutto simile a quella di una retta passante per due punti: anche qui si considerano le differenze tra le coordinate dei punti. Le equazioni parametriche di un piano passante per tre punti sono :

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0) \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana dello stesso piano, si può fare nel seguente modo.
Un generico punto $S(x, y, z) \in \Re^3$ appartiene al piano che passa per P, Q, R se e solo se $S - P$ sta nel sottospazio vettoriale associato al piano ~~(che è un sottospazio affine)~~; il sottospazio vettoriale di giacitura ha generatori $Q - P$ e $R - P$, che dunque formano una base di tale sottospazio. Quindi $S(x, y, z)$ appartiene al sottospazio se e solo se $S - P$, $Q - P$, $R - P$ sono linearmente dipendenti (infatti più di due vettori generatori ~~di un piano~~ sono sicuramente linearmente dipendenti, dal momento che il piano ha dimensione 2). Allora la matrice costituita dai tre vettori è singolare.
Imponendo tale condizione, si trova l'equazione cartesiana del piano.
Se $S(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ e $R(x_2, y_2, z_2)$, allora

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$ fornisce l'equazione di un piano passante per tre punti.

Fascio di piani
L'insieme di piani passanti per una retta r si chiama *fascio di piani* di asse r.

Date le equazioni cartesiane di una retta $r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, ossia l'intersezione tra due piani, il fascio di piani passanti per r è dato dalle loro combinazioni lineari ~~dei due piani~~; ossia $\lambda \cdot (ax + by + cz - d) + \mu \cdot (a'x + b'y + c'z - d') = 0$ sono gli infiniti piani passanti per la retta ottenuta dall'intersezione dei due piani ~~espressi tra parentesi~~. I parametri $\lambda, \mu \in \Re$ non devono essere entrambi nulli.
Se è data una retta $r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, l'equazione del piano che contiene r e passa per P sarà data imponendo il passaggio per P nell'equazione del fascio di piani per r.
N.B. ~~c_1, c_2~~ λ, μ non sono unici: una volta trovato il loro rapporto, è sufficiente scegliere un valore per uno dei due e trovare il rispettivo valore dell'altro.

<u>Esempio</u>
Troviamo l'equazione del piano π contenente $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ e passante per $P(1, 2, 3)$;
l'equazione del fascio di piani per r è data da $\lambda \cdot (x - z - 2) + \mu \cdot (2x + y + z - 1) = 0$;
Imponiamo il passaggio per P: $\lambda \cdot (1 - 3 - 2) + \mu \cdot (2 + 2 + 3 - 1) = 0$, da cui si trova che $2\lambda = 3\mu$.
Una coppia possibile che soddisfa la relazione è ad esempio $\lambda = 3$, $\mu = 2$;
Dunque l'equazione del piano contenente r e passante per r è: $3 \cdot (x - z - 2) + 2 \cdot (2x + y + z - 1) = 0$
ossia $\pi: 7x + 2y - z = 8$

Retta *r* passante per un punto *P* e perpendicolare a una retta *r*'
Questo tipo di esercizio si risolve eseguendo i seguenti passaggi:
1. Prima si trova il piano π perpendicolare a *r* e passante per *P*
2. Poi si trova il punto *Q* di intersezione tra π e *r*
3. Infine si trova la retta passante per *P* e *Q*.

Applichiamo tale procedimento sulla retta $r:\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3t \\ z = t-1 \end{cases}$ e sul punto $P(1,\ 2,\ 3)$

Troviamo il piano π che contiene *r* e passa per *P*: il piano è dato da $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ = d

$\pi: -x+3y+z=d$, dove d si trova imponendo il passaggio per *P*: $-1+6+3=d \rightarrow d=8$
Il piano che cerchiamo è $\pi: -x+3y+z=8$
Troviamo ora il punto di intersezione tra π e r: sostituiamo nell'equazione del piano l'equazione di *r*:
$t-2+9t+t-1=8 \rightarrow t=1$ Il punto cercato è $Q(2-1,\ 3\cdot 1,\ 1-1)=Q(1,\ 3,\ 0)$

A questo punto troviamo l'equazione della retta passante per *P* e *Q* :

$$r': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t(Q-P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad = \quad r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=3-3t \end{cases}$$

Retta r'' perpendicolare a due rette sghembe r, r'
Due rette sghembe hanno una e una sola comune perpendicolare.

Date $r: v_0+t v_1$ e $r': v_0'+s\ v_1'$, troviamo $r'': v_0''+u v_1''$
Per risolvere questo problema, procediamo nel seguente modo:
1. Dati i generici punti *P* e *Q*, rispettivamente, di *r* e *r'*, scriviamo l'equazione parametrica della retta $P+(P-Q)u$
2. Imponiamo che $(P-Q)\cdot v_1=0$ e $(P-Q)\cdot v_1'=0$ e mettiamo le due condizioni a sistema; sostituiamo i due valori che risolvono il sistema nell'equazione di $P+(P-Q)u$

<u>Esempio</u>

Sono date $r:\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}$ e $s:\begin{cases} x=-1+2s \\ y=2s \\ z=1+3s \end{cases}$; troviamo la comune perpendicolare *n*.

I vettori direttori di *r* ed *s* sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Troviamo l'equazione di $P+(P-Q)u$, dove $P=(t \quad t+2 \quad t+1)$ e $Q=(2s-1 \quad 2s \quad 3s+1)$

$$\begin{cases} x=t+(t-2s+1)u \\ y=t+2+(t-2s+2)u \\ z=t+1+(t-3s)u \end{cases};$$

imponiamo ora la condizione di perpendicolarità $\begin{pmatrix} t-2s+1 \\ t-2s+2 \\ t-3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ e $\begin{pmatrix} t-2s+1 \\ t-2s+2 \\ t-3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

e scriviamo le due equazioni che ne derivano in un sistema: $\begin{cases} 3t-7s+3=0 \\ 7t-17s+6=0 \end{cases}$

Il sistema è quadrato e, in forma matriciale, risulta $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$; applicando ad esempio il teorema di Cramer troviamo che le soluzioni sono

$$t = \frac{\det\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -6 & -17 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{9}{2} \quad \text{e} \quad s = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Sostituiamo i valori trovati nell'equazione $\begin{cases} x = t + (t-2s+1)u \\ y = t+2+(t-2s+2)u \\ z = t+1+(t-3s)u \end{cases}$:

~~n~~ r'': $\begin{cases} x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}u \\ y = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}u \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$; abbiamo trovato l'equazione della comune perpendicolare.

Possiamo verificare che il vettore direttore di ~~n~~ r'' $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia effettivamente perpendicolare ai vettori direttori di r ed s; ad esempio calcoliamo il prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. I due vettori sono in relazione di dipendenza lineare, dunque la retta che ha per vettore direttore l'uno o l'altro è equivalente.