

Sapienza Università di Roma  
Dipartimento di Scienze statistiche

Corsi di laurea triennale in Statistica, economia e società,  
Statistica gestionale e Statistica, economia, finanza e assicurazioni

Principali domande per la prova orale di Matematica 1° corso

*Oltre alle seguenti domande di carattere teorico, potranno essere proposti esercizi di applicazione dei medesimi concetti, nonché chiesti chiarimenti sullo svolgimento dell'elaborato scritto. Le domande contrassegnate da un asterisco (\*) sono di maggiore difficoltà.*

**1. Numeri reali e complessi**

- 1.1. definire campo
- 1.2. definire ed enunciare le proprietà delle operazioni binarie (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e unarie (coniugio) sull'insieme dei numeri complessi e dimostrare che esso è un campo
- 1.3. definire la corrispondenza tra l'insieme dei numeri complessi e il piano cartesiano e l'interpretazione grafica delle operazioni
- 1.4. enunciare la formula di Eulero
- 1.5. calcolare il reciproco di un numero complesso dato in forma cartesiana o polare
- 1.6. definire le coordinate cartesiane (parti reale e immaginaria) e polari (modulo e argomento) nel campo complesso ed enunciare le formule di conversione tra di esse

**2. Principio di induzione**

- 2.1. enunciare il principio di induzione
- 2.2. definire il coefficiente binomiale, enunciare e dimostrare le sue principali proprietà
- 2.3. enunciare la formula del binomio di Newton e dimostrare tramite il principio di induzione
- 2.4. \* enunciare e dimostrare la formula di De Moivre tramite quella del binomio di Newton

**3. Spazi vettoriali**

- 3.1. definire spazio vettoriale
- 3.2. definire combinazione lineare, generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione
- 3.3. dimostrare esistenza e unicità delle coordinate di un vettore rispetto a una base
- 3.4. enunciare i teoremi di estensione a base e di estrazione di base
- 3.5. enunciare e dimostrare che la dimensione di un sottospazio vettoriale proprio è minore di quella del sovraspazio
- 3.6. \* dimostrare che l'unione di sottospazi vettoriali può non essere un sottospazio vettoriale
- 3.7. definire somma e somma diretta di due o più sottospazi vettoriali
- 3.8. enunciare e dimostrare che due sottospazi vettoriali sono in somma diretta se e solo se hanno intersezione zero
- 3.9. enunciare e dimostrare il teorema di Grassmann

**4. Prodotti scalari**

- 4.1. definire prodotto scalare ed enunciare sue proprietà
- 4.2. definire norma ed enunciare sue proprietà
- 4.3. enunciare e dimostrare formule di polarizzazione
- 4.4. enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 4.5. definire l'angolo tra due vettori non nulli
- 4.6. enunciare la formula della proiezione ortogonale di un vettore lungo un altro
- 4.7. definire base ortogonale e ortonormale
- 4.8. enunciare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt
- 4.9. definire le matrici ortogonali ed enunciare loro proprietà
- 4.10. definire il complemento ortogonale a un sottospazio vettoriale, enunciare sue proprietà e metodo di calcolo

**5. Matrici, determinante e rango**

- 5.1. definire matrice, righe, colonne, operazioni con matrici e loro proprietà
- 5.2. enunciare le principali proprietà del determinante (normalizzazione, alternanza, multilinearità)
- 5.3. enunciare formula dello sviluppo di Laplace del determinante
- 5.4. enunciare il teorema di Binet
- 5.5. enunciare la formula del calcolo della matrice inversa
- 5.6. definire minore di matrice

- 5.7. enunciare varie definizioni equivalenti di rango di matrice
- 5.8. enunciare operazioni di riga su matrici
- 5.9. enunciare metodo di eliminazione di Gauss (o riduzione per righe)
- 5.10. enunciare metodo di calcolo della matrice inversa usando l'eliminazione di Gauss

## 6. Spazi affini

- 6.1. definire sottospazio affine di uno spazio vettoriale, il suo sottospazio vettoriale associato e la sua dimensione
- 6.2. definire sistema lineare omogeneo o non omogeneo
- 6.3. esprimere le soluzioni di un sistema lineare mediante quelle del sistema omogeneo associato e una soluzione particolare
- 6.4. enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli
- 6.5. enunciare il teorema di Cramer e dimostrare esistenza e unicità della soluzione

## 7. Applicazioni lineari

- 7.1. definire applicazione lineare tra spazi vettoriali, nucleo e immagine, iniettività, suriettività e biiettività
- 7.2. enunciare e dimostrare che l'iniettività di un'applicazione lineare equivale al nucleo essere zero
- 7.3. dimostrare che esiste ed è unica un'applicazione lineare che abbia date immagini degli elementi di una base
- 7.4. enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango
- 7.5. enunciare e dimostrare linearità di somma, prodotto per scalare e composizione di applicazioni lineari
- 7.6. definire matrice associata ad applicazione lineare rispetto a date basi ed enunciare formule di sua costruzione e utilizzo
- 7.7. enunciare e dimostrare relazioni tra operazioni tra applicazioni lineari e corrispondenti operazioni tra matrici
- 7.8. definire matrice di cambio di base ed enunciare e dimostrare sue proprietà
- 7.9. enunciare formula di cambio di base per matrice associata ad applicazione lineare
- 7.10. enunciare relazioni tra matrici ortogonali e cambi di base tra basi ortonormali

## 8. Diagonalizzazione di endomorfismi

- 8.1. definire autovettore, autovalore, autospazio e polinomio caratteristico di un endomorfismo ed enunciare le loro relazioni
- 8.2. enunciare e dimostrare l'invarianza del polinomio caratteristico per cambio di base
- 8.3. definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di autovettore e loro relazioni
- 8.4. enunciare e dimostrare condizioni necessarie e/o sufficienti per la diagonalizzazione di un endomorfismo
- 8.5. descrivere un procedimento di diagonalizzazione di endomorfismo
- 8.6. definire endomorfismo simmetrico rispetto a prodotto scalare reale e relativo criterio sulle matrici associate
- 8.7. enunciare il teorema spettrale nel caso reale ed enunciare e dimostrare l'ortogonalità tra autovettori di autovalori distinti

## 9. Forme bilineari (reali) e loro diagonalizzazione

- 9.1. definire forma bilineare (reale)
- 9.2. definire matrice associata a forma bilineare rispetto a base ed enunciare formule di costruzione, di utilizzo e di cambio di base
- 9.3. definire forma bilineare non degenere o simmetrica ed enunciare relativi criteri sulle matrici associate
- 9.4. definire minore principale di matrice simmetrica
- 9.5. definire forma bilineare simmetrica definita/semidefinita positiva/negativa ed enunciare criterio sui minori principali
- 9.6. definire la segnatura di una forma bilineare simmetrica ed enunciare il teorema di Sylvester
- 9.7. enunciare il criterio di Cartesio sul segno degli zeri di un polinomio e la sua applicazione alla segnatura di una forma bilineare simmetrica
- 9.8. \* descrivere un procedimento di diagonalizzazione di forma bilineare simmetrica attraverso la diagonalizzazione di un'opportuna applicazione lineare simmetrica per un opportuno prodotto scalare

## 10. Geometria analitica di punti, rette e piani nello spazio

- 10.1. definire punti, rette e piani nello spazio e loro espressioni in forma cartesiana o parametrica
- 10.2. enunciare le procedure di conversione tra equazioni parametriche e cartesiane
- 10.3. enunciare procedimento di determinazione delle posizioni reciproche (incidenza, coincidenza, appartenenza o inclusione, parallelismo, perpendicolarità) tra punti, rette o piani e delle loro intersezioni
- 10.4. enunciare procedimento di determinazione di rette o piani contenenti dati punti o rette