

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Scienze statistiche

Corsi di laurea triennale in Statistica, economia e società,
Statistica gestionale e Statistica, economia, finanza e assicurazioni

Principali domande per la prova orale di Matematica 1° corso

Oltre alle seguenti domande di carattere teorico, potranno essere proposti esercizi di applicazione dei medesimi concetti, nonché chiesti chiarimenti sullo svolgimento dell'elaborato scritto. Le domande contrassegnate da un asterisco () sono di maggiore difficoltà.*

1. Numeri reali e complessi

- 1.1. definire campo
- 1.2. definire ed enunciare le proprietà delle operazioni binarie (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e unarie (coniugio) sull'insieme dei numeri complessi e dimostrare che esso è un campo
- 1.3. definire la corrispondenza tra l'insieme dei numeri complessi e il piano cartesiano e l'interpretazione grafica delle operazioni
- 1.4. enunciare la formula di Eulero
- 1.5. calcolare il reciproco di un numero complesso dato in forma cartesiana o polare
- 1.6. definire le coordinate cartesiane (parti reale e immaginaria) e polari (modulo e argomento) nel campo complesso ed enunciare le formule di conversione tra di esse

2. Principio di induzione

- 2.1. enunciare il principio di induzione
- 2.2. definire il coefficiente binomiale, enunciare e dimostrare le sue principali proprietà
- 2.3. enunciare la formula del binomio di Newton e dimostrare tramite il principio di induzione
- 2.4. * enunciare e dimostrare la formula di De Moivre tramite quella del binomio di Newton

3. Spazi vettoriali

- 3.1. definire spazio vettoriale
- 3.2. definire combinazione lineare, generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione
- 3.3. dimostrare esistenza e unicità delle coordinate di un vettore rispetto a una base
- 3.4. enunciare i teoremi di estensione a base e di estrazione di base
- 3.5. enunciare e dimostrare che la dimensione di un sottospazio vettoriale proprio è minore di quella del sovraspazio
- 3.6. * dimostrare che l'unione di sottospazi vettoriali può non essere un sottospazio vettoriale
- 3.7. definire somma e somma diretta di due o più sottospazi vettoriali
- 3.8. enunciare e dimostrare che due sottospazi vettoriali sono in somma diretta se e solo se hanno intersezione zero
- 3.9. enunciare e dimostrare il teorema di Grassmann

4. Prodotti scalari

- 4.1. definire prodotto scalare ed enunciare sue proprietà
- 4.2. definire norma ed enunciare sue proprietà
- 4.3. enunciare e dimostrare formule di polarizzazione
- 4.4. enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 4.5. definire l'angolo tra due vettori non nulli
- 4.6. enunciare la formula della proiezione ortogonale di un vettore lungo un altro
- 4.7. definire base ortogonale e ortonormale
- 4.8. enunciare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt
- 4.9. definire le matrici ortogonali ed enunciare loro proprietà
- 4.10. definire il complemento ortogonale a un sottospazio vettoriale, enunciare sue proprietà e metodo di calcolo

5. Matrici, determinante e rango

- 5.1. definire matrice, righe, colonne, operazioni con matrici e loro proprietà
- 5.2. enunciare le principali proprietà del determinante (normalizzazione, alternanza, multilinearità)
- 5.3. enunciare formula dello sviluppo di Laplace del determinante
- 5.4. enunciare il teorema di Binet
- 5.5. enunciare la formula del calcolo della matrice inversa
- 5.6. definire minore di matrice

- 5.7. enunciare varie definizioni equivalenti di rango di matrice
- 5.8. enunciare operazioni di riga su matrici
- 5.9. enunciare metodo di eliminazione di Gauss (o riduzione per righe)
- 5.10. enunciare metodo di calcolo della matrice inversa usando l'eliminazione di Gauss

6. Spazi affini

- 6.1. definire sottospazio affine di uno spazio vettoriale, il suo sottospazio vettoriale associato e la sua dimensione
- 6.2. definire sistema lineare omogeneo o non omogeneo
- 6.3. esprimere le soluzioni di un sistema lineare mediante quelle del sistema omogeneo associato e una soluzione particolare
- 6.4. enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli
- 6.5. enunciare il teorema di Cramer e dimostrare esistenza e unicità della soluzione

7. Applicazioni lineari

- 7.1. definire applicazione lineare tra spazi vettoriali, nucleo e immagine, iniettività, suriettività e biiettività
- 7.2. enunciare e dimostrare che l'iniettività di un'applicazione lineare equivale al nucleo essere zero
- 7.3. dimostrare che esiste ed è unica un'applicazione lineare che abbia date immagini degli elementi di una base
- 7.4. enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango
- 7.5. enunciare e dimostrare linearità di somma, prodotto per scalare e composizione di applicazioni lineari
- 7.6. definire matrice associata ad applicazione lineare rispetto a date basi ed enunciare formule di sua costruzione e utilizzo
- 7.7. enunciare e dimostrare relazioni tra operazioni tra applicazioni lineari e corrispondenti operazioni tra matrici
- 7.8. definire matrice di cambio di base ed enunciare e dimostrare sue proprietà
- 7.9. enunciare formula di cambio di base per matrice associata ad applicazione lineare
- 7.10. enunciare relazioni tra matrici ortogonali e cambi di base tra basi ortonormali

8. Diagonalizzazione di endomorfismi

- 8.1. definire autovettore, autovalore, autospazio e polinomio caratteristico di un endomorfismo ed enunciare le loro relazioni
- 8.2. enunciare e dimostrare l'invarianza del polinomio caratteristico per cambio di base
- 8.3. definire molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di autovettore e loro relazioni
- 8.4. enunciare e dimostrare condizioni necessarie e/o sufficienti per la diagonalizzazione di un endomorfismo
- 8.5. descrivere un procedimento di diagonalizzazione di endomorfismo
- 8.6. definire endomorfismo simmetrico rispetto a prodotto scalare reale e relativo criterio sulle matrici associate
- 8.7. enunciare il teorema spettrale nel caso reale ed enunciare e dimostrare l'ortogonalità tra autovettori di autovalori distinti

9. Forme bilineari (reali) e loro diagonalizzazione

- 9.1. definire forma bilineare (reale)
- 9.2. definire matrice associata a forma bilineare rispetto a base ed enunciare formule di costruzione, di utilizzo e di cambio di base
- 9.3. definire forma bilineare non degenere o simmetrica ed enunciare relativi criteri sulle matrici associate
- 9.4. definire minore principale di matrice simmetrica
- 9.5. definire forma bilineare simmetrica definita/semidefinita positiva/negativa ed enunciare criterio sui minori principali
- 9.6. definire la segnatura di una forma bilineare simmetrica ed enunciare il teorema di Sylvester
- 9.7. enunciare il criterio di Cartesio sul segno degli zeri di un polinomio e la sua applicazione alla segnatura di una forma bilineare simmetrica
- 9.8. * descrivere un procedimento di diagonalizzazione di forma bilineare simmetrica attraverso la diagonalizzazione di un'opportuna applicazione lineare simmetrica per un opportuno prodotto scalare

10. Geometria analitica di punti, rette e piani nello spazio

- 10.1. definire punti, rette e piani nello spazio e loro espressioni in forma cartesiana o parametrica
- 10.2. enunciare le procedure di conversione tra equazioni parametriche e cartesiane
- 10.3. enunciare procedimento di determinazione delle posizioni reciproche (incidenza, coincidenza, appartenenza o inclusione, parallelismo, perpendicolarità) tra punti, rette o piani e delle loro intersezioni
- 10.4. enunciare procedimento di determinazione di rette o piani contenenti dati punti o rette