Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Scienze statistiche

Corsi di laurea triennale in Statistica, economia e società,
Statistica gestionale e Statistica, economia, finanza e assicurazioni

Esercizi di Matematica 1° corso con soluzioni

Esercizio 1. Siano $z = 2 - 4i$ e $w = 3i + 3$. Calcolare:

(a) $z + w$;
(b) $z \cdot w$;
(c) z/w;
(d) $\Re z$;
(e) $\Im z$;
(f) $\bar{z}$;
(g) $|w|$;
(h) $\arg w$;
(i) la forma polare di w.

Svolgimento.

(a) Si sommano separatamente parte reale e parte immaginaria dei due numeri: $z+w = (2-4i)+(3i+3) = 5 - i$;
(b) $z \cdot w = (2 - 4i) \cdot (3i + 3) = 6i + 6 - 12i^2 - 12i = 6i + 6 + 12 - 12i = 18 - 6i$;
(c) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \dfrac{(2 - 4i) \cdot (-3i + 3)}{(3i + 3) \cdot (-3i + 3)} = \dfrac{-6i + 6 - 12 - 12i}{3^2 + 3^2} = \dfrac{-6 - 18i}{18} = -\dfrac{1}{3} - i$;
(d) $\Re z = 2$;
(e) $\Im z = -4$;
(f) $\overline{z} = 2 + 4i$;
(g) $|w| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
(h) $\arg w = \arctan \dfrac{\Im z}{\Re z} = \arctan \dfrac{3}{3} = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, perché $\Re w > 0$ (se fosse stato $\Re w < 0$, al risultato si sarebbe aggiunto π);
(i) $w = |w|e^{i \arg w} = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (qui si può omettere l'addendo $2k\pi$); alternativamente si può riscrivere $e^{i\pi/4} = \cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}$.

Esercizio 2. Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Svolgimento. L'asserto $\mathcal{P}_n$ vale per $n = 0$ perché $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ ed $\dfrac{n^2(n + 1)^2}{4} = \dfrac{0^2(0 + 1)^2}{4} = 0$. Per $n \in \mathbf{N}$, supponendo che valga $\mathcal{P}_n$ dimostriamo che vale anche $\mathcal{P}_{n+1}$, cioè che $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n + 1)^2\big((n + 1) + 1\big)^2}{4}$. Si ha $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n + 1)^3 =$ (per ipotesi induttiva) $\dfrac{n^2(n + 1)^2}{4} + (n + 1)^3 = (n + 1)^2\left(\dfrac{n^2}{4} + (n + 1)\right) = (n + 1)^2\dfrac{(n + 2)^2}{4}$.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Eseguire la riduzione a gradini di A.
(b) Calcolare il rango di A.

Svolgimento.

(a) La prima colonna di A non tutta nulla è la prima. Il suo primo termine non è nullo (altrimenti per ottenerlo si sarebbe scambiata la prima riga con un'altra) ed è il primo pivot $p_1 = 2$. Si annullano i termini al di sotto di p_1 di tale colonna sottraendo opportuni multipli della prima riga dalle successive: la prima riga si sottrae moltiplicata per $3/2$ dalla seconda e moltiplicata per $1/2$ dalla terza, ottenendo

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 & 7/2 \end{pmatrix}$. Si ripete l'algoritmo sulla sottomatrice 2×3 di A' dei termini a destra e al di sotto di p_1, la cui prima colonna non nulla è ancora la prima. Il primo termine è non nullo ed è quindi il secondo pivot $p_2 = 1$. Per annullare i termini al di sotto di p_2 si sottrae la riga alla successiva, ottenendo $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La sottomatrice 1×2 di A'' dei termini a destra e al di sotto di p_2 è nulla, quindi l'algoritmo è completato.

(b) $rkA = rkA'' = 2$, il numero dei pivot.

Esercizio 4. Verificare che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \colon c = 2a \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

Svolgimento. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ perché $c = 0 = 2 \cdot 0 = 2a$. Se $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, w' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in W$ allora $w + w' = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$ e $c + c' = 2a + 2a' = 2(a + a')$, quindi $w + w' \in W$. Se $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W$ e $t \in \mathbf{R}$ allora $tw = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ e $tc = t(2a) = 2ta$, quindi $tw \in W$.

Esercizio 5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare la dimensione e determinare una base per il sottospazio vettoriale T di $\mathbf{R}^4$ generato dalle righe A_1, A_2, A_3 della matrice A.

(b) Calcolare la dimensione e determinare una base per il sottospazio vettoriale $S = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid Ax = 0\}$.

(c) Indicare se le dimensioni calcolate nei punti precedenti debbano soddisfare una relazione indipendente dalle specifiche componenti di A, ed eventualmente quale.

Svolgimento.

(a) $\dim T = \operatorname{rk} A$. Come nell'esercizio 3, con l'algoritmo di Gauss si ottiene $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\operatorname{rk} A = 2$. Una base di T è formata dalle righe di A'' contenenti i pivot, cioè $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\}$ (alternativamente, da due righe di A che ne contengano un minore di ordine 2 con determinante diverso da zero).

(b) $\dim \operatorname{Sol}(A, 0) = \dim \mathbf{R}^4 - \operatorname{rk} A = 4 - 2 = 2$. Un minore di A con determinante non nullo e ordine pari al rango è quello in basso a destra: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi si elimina la prima riga di A (e la relativa equazione) perché non ne contiene elementi e per lo stesso motivo si portano a termine noto le incognite x, y che diventano parametri liberi (alternativamente si può utilizzare A'' scegliendone il minore contenente i pivot, cioè $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$). Il sistema, non più omogeneo, diventa $\begin{cases} z - 2w = -x + y \\ z = -x - y \end{cases}$ e si può risolvere col metodo di Cramer oppure per sostituzioni successive (in questo caso z è già dato, mentre w si ricava facilmente), dando $\begin{cases} z = -x - y \\ w = -y \end{cases}$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$, quindi $\operatorname{Sol}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \\ -y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{R} \right\} =$ $\operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e una base di S è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $T \oplus T^\perp = \mathbf{R}^4$ ed $S = T^\perp$, quindi $\dim T + \dim S = \dim \mathbf{R}^4 = 4$.

Esercizio 6. Siano dati i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $\cos \widehat{vw}$.
(b) Calcolare la proiezione ortogonale $p_v(w)$ di w lungo v.
(c) Verificare che $\|p_v(w)\| \leq \|w\|$.
(d) Verificare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz per v e w.

Svolgimento.

(a) $\cos \widehat{vw} = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.
(b) $p_v(w) = \dfrac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \dfrac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$.
(c) Passando ai quadrati si ha $\|p_v(w)\|^2 = \dfrac{36}{81} = \dfrac{4}{9} \leq 8 = \|w\|^2$.
(d) $|v \cdot w| = 2 \leq 3 \cdot 2\sqrt{2} = \|v\| \cdot \|w\|$.

Esercizio 7. Determinare la base $\mathcal{B}''$ ottenuta applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base di $\mathbf{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Svolgimento. Se v_1, v_2, v_3 denotano i vettori della base $\mathcal{B}$ si ha $v_1' = c_1 v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $c_1 = 1$, poi $v_2' = c_2\big(v_2 - p_{v_1'}(v_2)\big) = c_2\left(v_2 - \dfrac{v_2 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1'\right) = c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $c_2 = 2$, e $v_3' = c_3\big(v_3 - p_{v_1'}(v_3) - p_{v_2'}(v_3)\big) = c_3\left(v_3 - \dfrac{v_3 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1' - \dfrac{v_3 \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'} v_2'\right) = c_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $c_3 = 3$, pertanto $\mathcal{B}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è la base ortogonale, mentre la base ortonormale sarà $\mathcal{B}'' = \left\{ \dfrac{v_1'}{\|v_1'\|}, \dfrac{v_2'}{\|v_2'\|}, \dfrac{v_3'}{\|v_3'\|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 8. Siano dati in $\mathbf{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori del parametro $t \in \mathbf{R}$ per i quali $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(b) Per $t = 0$ determinare le coordinate del vettore v_4 in tale base.

Svolgimento.

(a) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se è non nullo $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & t & 1 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$, che è uguale a $2t^2 + 10t + 8 = 2(t+1)(t+4)$, quindi se e solo se $t \neq -1, -4$.
(b) Le coordinate cercate sono soluzione (da calcolare ad esempio col metodo di Cramer) per $t = 0$ del sistema lineare non omogeneo $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = v_4$, cioè $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9. Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[t]$ dei polinomi reali in t di grado minore o uguale di 2 siano

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 2 + t + t^2, \\ p_2(t) &= 1 - t + 2t^2, \\ p_3(t) &= 3t - 3t^2. \end{aligned}$$

(a) Determinare se p_1, p_2 siano linearmente indipendenti.
(b) Specificare se $\mathcal{B} = \{p_1, p_2\}$ sia una base di $W = \mathrm{Span}(p_1, p_2)$.
(c) Mostrare che $p_3 \in W$ e determinare le coordinate di p_3 rispetto a $\mathcal{B}$.

Svolgimento.

(a) Per il principio di identità dei polinomi, $c_1p_1(t) + c_2p_2(t) = (2c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)t + (c_1 + 2c_2)t^2$ è uguale al polinomio nullo se e solo se $\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$; tale sistema lineare omogeneo nelle incognite c_1, c_2 ha solo la soluzione nulla, ad esempio perché la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ del sistema ha rango pari al numero di colonne, cioè di incognite. Quindi p_1, p_2 sono linearmente indipendenti.

(b) Per il punto precedente p_1, p_2 sono linearmente indipendenti e per definizione generano $\mathrm{Span}(p_1, p_2)$, del quale quindi $\mathcal{B}$ è base.

(c) Ancora per il principio di identità dei polinomi si ha $c_1p_1(t) + c_2p_2(t) = p_3(t)$, cioè $(2c_1 + c_2) + (c_1 - c_2) \cdot t + (c_1 + 2c_2)t^2 = 3t - 3t^2$, se e solo se $\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = -3 \end{cases}$; il sistema è risolubile, ad esempio per il teorema di Rouché-Capelli perché, posto $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, si ha $\mathrm{rk}\, A = 2 = \mathrm{rk}(A|b)$ (infatti $\det(A|b) = 0$); quindi $p_3 \in W$. Le prime due righe di A hanno $\det = -3 \neq 0$, quindi si può eliminare la terza equazione e, ad esempio col metodo di Cramer, ottenere l'unica soluzione $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10. Sia dato il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x + 3z = 2, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

(a) Verificare che il sistema sia risolubile.
(b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.
(c) Determinare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.
(d) Esprimere tutte le soluzioni del sistema non omogeneo in termini di una sua soluzione particolare e delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Svolgimento.

(a) Il sistema si riscrive $AX = b$ ove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'algoritmo di Gauss applicato alla matrice completa $(A|b)$ (sottraendo la prima riga alla seconda, poi la seconda alla terza) dà $(A|b)'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con entrambi i pivot $p_1 = 1 = p_2$ nelle prime tre colonne, quindi $\mathrm{rk}\, A = 2 = \mathrm{rk}(A|b)$ e il sistema è risolubile per il teorema di Rouché-Capelli.

(b) Dato che le incognite sono 3 si ha $\dim \mathrm{Sol}(A, b) = 3 - \mathrm{rk}\, A = 1$.

(c) Utilizzando A'' anziché A (dà un sistema equivalente perché ottenuta da operazioni di riga), il minore di ordine 2 contenente i pivot è $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; eliminando la terza riga di A'' e portando a termine noto del sistema omogeneo associato l'incognita z, che diventa parametro libero, si ottiene il sistema

$\begin{cases} x - y = -z \\ \quad\ y = -2z \end{cases}$. Ad esempio col metodo di Cramer si ricava $\mathrm{Sol}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbf{R} \right\}$, una cui base è $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) Analogamente si ha $\mathrm{Sol}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbf{R} \right\} = X_0 + \mathrm{Sol}(A,0)$ ove $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la soluzione particolare per $z = 0$.

Esercizio 11. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}, \quad W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Calcolare le dimensioni e determinare basi di U, W.
(b) Calcolare le dimensioni e determinare basi di $U \cap W$ e di $U + W$.

Svolgimento.

(a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, quindi $\dim U = 4 - 2 = 2$. Usando come minore di ordine 2 con determinante diverso da zero le ultime due colonne, le incognite x_1, x_2 diventano parametri liberi, da cui $U = \mathrm{Sol}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ con base $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Invece se $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ allora $\dim W = \mathrm{rk}\, B = 2$, come si vede ad esempio con l'algoritmo di Gauss. Il minore di B di ordine 2 formato da seconda e quarta riga e prima e seconda colonna ha $\det = -1 \neq 0$, quindi una base di W è $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ genera il sottospazio $U + W$, quindi se $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ allora $\dim(U+W) = \mathrm{rk}\, C = 3$, calcolato, ad esempio, nuovamente applicando l'algoritmo di Gauss. Il minore di C di ordine 3 formato da prima, seconda e quarta riga e prima, seconda e quarta colonna ha $\det = 1 \neq 0$, quindi una base di $U+W$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Invece $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$ per il teorema di Grassmann; inoltre $U \cap W = \left\{ v \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : v \in U \right\} = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{cases} (2c_1) + (-c_1) + (-2c_1 - c_2) = 0 \\ (c_1 + c_2) = 0 \end{cases} \right\}$. Il sistema si riscrive $\begin{cases} -c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$ con soluzione $c_1 = -c_2 \in \mathbf{R}$, quindi $U \cap W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : c_1 \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, da cui $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $U \cap W$.

Esercizio 12. Siano date le rette

$$r : \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5, \\ x + 3y + 2z = 10, \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}.$$

(a) Scrivere un'equazione parametrica della retta r.
(b) Determinare la posizione reciproca di r e r'.

Svolgimento.

(a) Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, il minore di A delle prime due colonne ha det $= -5 \neq 0$, quindi portando a termine noto l'incognita z che diventa parametro libero e risolvendo il sistema, ad esempio col metodo di Cramer, si ha $r = \mathrm{Sol}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2z/5 \\ 3 - 4z/5 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbf{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ (posto $z = 5$ per evitare i denominatori), perciò $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) Da $r' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $\det \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 1 \\ 1-3 & 4 & 1 \\ 2-0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -24 \neq 0$, pertanto r, r' sono sghembe.

Esercizio 13. In $\mathbf{R}^3$ siano dati i punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

inoltre, sia r la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

(a) Scrivere un'equazione della retta r' passante per A, B.
(b) Determinare la posizione reciproca di r e r'.
(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a r'.
(d) Scrivere un'equazione della retta r'' passante per C e la cui direzione è ortogonale alle direzioni di r e r'.

Svolgimento.

(a) $r' : v = A + t(B - A)$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un'equazione parametrica di r'.

(b) Se $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, svolgendo come nell'esercizio precedente (usando y come parametro libero) si ottiene $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siccome $\det \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ 2-0 & 1 & 1 \\ -1-2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$, le rette sono sghembe.

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dà i coefficienti di π, mentre il termine noto è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3$, quindi $\pi : x - y - 2z = -3$.

(d) Dal punto precedente sappiamo che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è ortogonale alle direzioni di r, r', quindi $r'' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 14. Siano dati i punti

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.
(b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π' passante per D e ortogonale a v.
(c) Determinare un'equazione per la retta r passante per E e parallela a π, π'.

Svolgimento.

(a) Un'equazione parametrica di π è $v = A + s(B - A) + t(C - A)$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dà i coefficienti dell'equazione cartesiana e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$ il termine noto, perciò $\pi : -2x + y - z = -1$.
(b) Dato che $D \cdot v = 2$ si ha $\pi' : x + y + z = 2$.
(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, quindi $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 15. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 2z \\ y - z \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare la matrice associata A.
(b) Calcolare $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Svolgimento.

(a) $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, quindi $A = {}_{\mathcal{E}_2} f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 16. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ nel dominio e nel codominio.
(b) Determinare basi di $\ker f, \operatorname{img} f$.
(c) Verificare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{R}^3$.
(d) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio.

Svolgimento.

(a) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\0 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, pertanto ${}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\0 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

(b) Se $A = {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3}$, come nell'esercizio 5 calcoliamo $\operatorname{rk} A = 2$, perché $\det A = 0$ e il minore di ordine 2 in basso a sinistra $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ ha $\det = 4 \neq 0$; quindi $\dim \operatorname{img} f = \operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A = 2$ e $\dim \ker f = n - \operatorname{rk} f = 3 - 2 = 1$. Una base di $\operatorname{img} f$ è data dalle colonne di A che contengono quel minore, cioè $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$. Eliminando la prima equazione del sistema $Ax = 0$, disgiunta dal minore, portando a termine noto l'incognita z che diventa parametro libero e risolvendo il sistema, ad esempio col metodo di Cramer, si ha $\ker f = \operatorname{Sol}(A, 0) = \left\{\begin{pmatrix}-z/2\\3z/2\\z\end{pmatrix} : z \in \mathbf{R}\right\}$; perciò $\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$ (posto $z = 2$ per evitare i denominatori) ne è base.

(c) In effetti $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

(d) Dato che $M = {}_{\mathcal{E}_3}i_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, si ha ${}_{\mathcal{B}}i_{\mathcal{E}_3} = M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, pertanto ${}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}i_{\mathcal{E}_3} \cdot {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3} \cdot {}_{\mathcal{E}_3}i_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\2 & -3 & -2\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Esercizio 17. Sia $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[t]$ dei polinomi reali in t di grado ≤ 2, sia $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonica dello spazio vettoriale W delle matrici 2×2 reali simmetriche e sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare definita da

$$f(1 + t^2) = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}, \qquad f(t^2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix}-2 & -1\\-1 & -3\end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta l'applicazione f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e $\mathcal{C}$ nel codominio.

(b) Calcolare le dimensioni e determinare basi di $\ker f$ e di $\operatorname{img} f$.

Svolgimento.

(a) Denotando con $w_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ gli elementi di $\mathcal{C}$ si ha $f(1) = f\big((1 + t^2) - t^2\big) =$ (per linearità) $f(1 + t^2) - f(t^2) = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix} = w_1 + 2w_2$, $f(t) = -2w_1 - w_2 - 3w_3$, $f(t^2) = w_1 + w_2 + w_3$. Quindi $f(1)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, f(t)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}, f(t^2)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, da cui ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & -1 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

(b) Se $A = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ allora $\operatorname{rk} A = 2$ perché $\det A = 0$ e il minore dei termini d'angolo $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ ha $\det = 1 \neq 0$; quindi $\dim \operatorname{img} f = \operatorname{rk} f = 2$ e $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Siccome $\operatorname{img} f = \{w \in W \colon \text{esiste } v \in \mathbf{R}^3 \text{ tale che } Av = w_{\mathcal{C}}\}$, una sua base è data dagli elementi $w, w' \in W$ tali che $w_{\mathcal{C}}, w'_{\mathcal{C}}$ siano le colonne di A che contengono quel minore, cioè $\{f(1), f(t^2)\} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Dato che $\ker f = \{v \in \mathbf{R}_2[t] \colon v_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Sol}(A, 0)\}$, eliminiamo la seconda equazione del sistema $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = 0$, disgiunta dal minore, portiamo a termine noto l'incognita c_2 che diventa parametro libero e, ad esempio col metodo di Cramer, otteniamo $\operatorname{Sol}(A, 0) = \left\{\begin{pmatrix}-c_2\\c_2\\3c_2\end{pmatrix} : c_2 \in \mathbf{R}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Perciò una base di $\ker f$ è $\{-1 + t + 3t^2\}$.

Esercizio 18. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ nel dominio e nel codominio.
(b) Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.
(c) Determinare basi degli autospazi di f.
(d) Determinare se f sia diagonalizzabile e, in caso affermativo, effettuare la diagonalizzazione.

Svolgimento.

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pertanto ${}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Se $A = {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3}$, il polinomio caratteristico di f è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$ (per lo sviluppo di Laplace lungo la terza colonna) $-(\lambda+2)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, perciò gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità algebriche m.a.$(1) = 2$ e m.a.$(-2) = 1$. Per le molteplicità geometriche, da $1 \le$ m.g.$(-2) \le$ m.a.(-2) segue m.g.$(-2) = 1$, mentre si calcola $\mathrm{rk}(A - 1I) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2$, perché $\det(A - 1I) = 0$ e il minore di prima e terza riga e ultime due colonne $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ha $\det = 12 \neq 0$; quindi m.g.$(1) = n - \mathrm{rk}(A - 1I) = 3 - 2 = 1$. Dato che m.g.$(1) \neq$ m.a.(1) si deduce che f non è diagonalizzabile.

(c) Eliminando dal sistema lineare $(A - 1I)x = 0$ la seconda equazione si ottiene $\begin{cases} -4x_2 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; usando l'incognita x_1 come parametro libero (anche se non compare esplicitamente) e risolvendo, ad esempio col metodo di Cramer (che dà $x_2 = x_3 = 0$), si ha $V_1 = \{v \in \mathbf{R}^3 \colon f(v) = 1v\} = \ker(A - 1I) = \mathrm{Sol}(A - 1I, 0) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbf{R}\right\}$, perciò $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ne è base. Analogamente, siccome $A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\mathrm{rk} = n -$ m.g.$(-2) = 3 - 1 = 2$ e il minore in alto a sinistra $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha $\det = 9 \neq 0$, dal sistema lineare $(A + 2I)x = 0$ si può eliminare la terza equazione, usare l'incognita x_3 come parametro libero e dedurre che $x_1 = x_2 = 0$ e $V_{-2} = \{v \in \mathbf{R}^3 \colon f(v) = -2v\} = \mathrm{Sol}(A + 2I, 0) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbf{R}\right\}$, di cui $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è base.

(d) Si è già detto in (b) che f non è diagonalizzabile.

Esercizio 19. Come l'esercizio precedente, ma con

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.

(a) Come nell'esercizio precedente, $A = {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$ (col metodo di Sarrus) $-\lambda(5-\lambda)^2 + 2 - 2 + \lambda + 2(5-\lambda) - 2(5-\lambda) = -\lambda\big((5-\lambda)^2 - 1\big) = -\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 24) =$ (risolvendo il polinomio di secondo grado) $-\lambda(\lambda-4)(\lambda-6)$, perciò gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 6$. Dato che il numero di autovalori distinti coincide con la dimensione dello spazio si deduce che f è diagonalizzabile. Ciascun autovalore ha molteplicità algebrica $= 1$, quindi anche molteplicità geometrica $= 1$. Perciò una matrice diagonalizzata è $D = {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, ma resta da determinare la base $\mathcal{B}$ diagonalizzante.

(c) Siccome la matrice $A - 0I = A$ ha $\mathrm{rk} = n - \mathrm{m.g.}(0) = 3 - 1 = 2$ e il suo minore in basso a destra $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ha $\det = 2 \neq 0$, dal sistema lineare $(A - 0I)x = 0$ eliminiamo la prima equazione, usiamo l'incognita x_1 come parametro libero e deduciamo, ad esempio col metodo di Cramer, che $V_0 = \{v \in \mathbf{R}^3 \colon f(v) = 0v\} = \mathrm{Sol}(A - 0I, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbf{R} \right\}$, di cui $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base. Analogamente $A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\mathrm{rk} = n - \mathrm{m.g.}(4) = 3 - 1 = 2$ e il suo minore di prima e terza riga e prime due colonne $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha $\det = -2 \neq 0$, quindi dal sistema lineare $(A - 4I)x = 0$ eliminiamo la seconda equazione, usiamo l'incognita x_3 come parametro libero e deduciamo che $V_4 = \{v \in \mathbf{R}^3 \colon f(v) = 4v\} = \mathrm{Sol}(A - 4I, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbf{R} \right\}$, di cui $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base. Infine, anche $A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha $\mathrm{rk} = n - \mathrm{m.g.}(6) = 3 - 1 = 2$ e il suo minore di prime due righe e prima e terza colonna $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ha $\det = -4 \neq 0$, perciò dal sistema lineare $(A - 4I)x = 0$ eliminiamo la terza equazione, usiamo l'incognita x_2 come parametro libero e deduciamo che $V_6 = \mathrm{Sol}(A - 6I, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbf{R} \right\}$, di cui $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base.

(d) Si è già detto in (b) che f è diagonalizzabile e qual è una matrice diagonalizzata, mentre la base diagonalizzante corrispondente è l'unione di quelle degli autospazi, cioè $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

In altri termini, se $M = {}_{\mathcal{E}_3}i_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si ha $D = M^{-1}AM$ per la formula di cambio di base, che può essere verificata più facilmente nella forma $MD = AM$.

Esercizio 20. Come l'esercizio precedente, ma con

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.

(a) Come negli esercizi precedenti, $A = {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$ (con lo sviluppo di Laplace lungo la terza riga) $-(\lambda + 1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)\big((\lambda-1)(\lambda+1)+1\big) = -(\lambda+1)\lambda^2$, perciò gli autovalori di f sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebriche $\mathrm{m.a.}(-1) = 1$ e $\mathrm{m.a.}(0) = 2$. Ne segue $\mathrm{m.g.}(-1) = 1$, mentre si calcola $\mathrm{rk}(A - 0I) = \mathrm{rk}\, A = 2$, perché $\det A = 0$ e il minore dei termini d'angolo $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha $\det = -1 \neq 0$; quindi $\mathrm{m.g.}(0) = n - \mathrm{rk}(A - 0I) = 3 - 2 = 1$. (Dato che $\mathrm{m.g.}(0) \neq \mathrm{m.a.}(0)$ si deduce che f non è diagonalizzabile.)

(c) Eliminando da $(A - 0I)x = 0$ la seconda equazione e usando x_2 come parametro si ha $V_0 = \mathrm{Sol}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbf{R} \right\}$, perciò $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ne è base. Invece, siccome $A + 1I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha

$\mathrm{rk} = n - \mathrm{m.g.}(-1) = 3 - 1 = 2$ e il minore in alto a destra $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha det $= 1 \neq 0$, dal sistema lineare $(A + 1I)x = 0$ si elimina la terza equazione e si usa l'incognita x_1 come parametro libero, deducendo che $V_{-1} = \{v \in \mathbf{R}^3 \colon f(v) = -v\} = \mathrm{Sol}(A + 1I, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbf{R} \right\}$, di cui $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base.

(d) Si è già detto in (b) che f non è diagonalizzabile.

Esercizio 21. Determinare i valori del parametro $t \in \mathbf{R}$ per i quali risulta diagonalizzabile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. In funzione del parametro t, il polinomio caratteristico di A (o meglio, dell'applicazione lineare $f \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ data da $f(v) = Av$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$) è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(t-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-t)(\lambda-1)$, le cui radici sono $2, t, 1$. Si distinguono tre casi:

- caso $t \neq 1, 2$: allora gli autovalori distinti sono tre (cioè $2, t, 1$), tanti quanta è la dimensione dello spazio, quindi A (cioè f) è diagonalizzabile;
- caso $t = 1$: allora $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, quindi $\mathrm{m.a.}(1) = 2$ e $\mathrm{m.a.}(2) = 1$, da cui $\mathrm{m.g.}(2) = 1$. Siccome $\mathrm{rk}(A - 1I) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, si ha $\mathrm{m.g.}(1) = n - \mathrm{rk}(A - 1I) = 3 - 1 = 2$. Allora $\mathrm{m.g.}(1) + \mathrm{m.g.}(2) = 2 + 1 = 3 = n$, quindi A (cioè f) è anche qui diagonalizzabile.
- caso $t = 2$: allora $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$, quindi $\mathrm{m.a.}(2) = 2$ mentre $\mathrm{m.a.}(1) = 1 = \mathrm{m.g.}(1)$. Siccome $\mathrm{rk}(A - 2I) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$, si ha $\mathrm{m.g.}(2) = n - \mathrm{rk}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$. Allora $\mathrm{m.g.}(2) \neq \mathrm{m.a.}(2)$, quindi A (cioè f) non è diagonalizzabile.

Esercizio 22. La forma quadratica q su $\mathbf{R}^3$ sia data da

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3.$$

(a) Scrivere la matrice simmetrica A che rappresenta q nella base canonica di $\mathbf{R}^3$.
(b) Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di q.
(c) Specificare se q sia degenere.

Svolgimento.

(a) $q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, così $A = {}_{\mathcal{E}_3}b_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo di Laplace lungo la seconda riga) $(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)\big((\lambda+2)(\lambda-1) - 1\big) = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-3)$: il criterio di Cartesio sul polinomio $(\lambda^2 + \lambda - 3)$, i cui coefficienti presentano una variazione di segno, dice che esso ha una radice (reale) positiva, che si aggiunge alla radice $1 > 0$ del primo fattore. Quindi $p(\lambda)$ ha due radici positive; siccome $p(0) = -3 \neq 0$ allora 0 non è radice di $p(\lambda)$. Perciò $n_+ = 2$, $n_0 = 0$ ed $n_- = n - n_+ - n_0 = 3 - 2 - 0 = 1$.

(c) q (o b) è non degenere perché $n_0 = 0$ (o perché $\det A = -3 \neq 0$).

Esercizio 23. La forma quadratica q su $\mathbf{R}^4$ sia data da

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2.$$

(a) Scrivere la matrice simmetrica A che rappresenta q nella base canonica di $\mathbf{R}^4$.
(b) Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di q.
(c) Specificare se q sia degenere.
(d) Diagonalizzare q, ossia determinare una matrice ortogonale N e una matrice diagonale D tali che ${}^tNAN = D$.

Svolgimento.

(a) Come nell'esercizio precedente, $A = {}_{\mathcal{E}_3}b_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo di Laplace lungo l'ultima riga, poi nuovamente) $-\lambda(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2)\big((\lambda-1)^2-1\big) = \lambda(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)^2$, che ha radici 0 e 2, entrambe doppie; perciò $n_+ = 2$, $n_0 = 2$, $n_- = 0$.

(c) q è degenere perché $n_0 > 0$ (o perché A ha det $= 0$, avendo una riga nulla).

(d) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_3$. Dato che $A = {}_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{E}_3}$ è simmetrica ed $\mathcal{E}_3$ è ortonormale per il prodotto scalare canonico, anche f è simmetrica e, per il teorema spettrale, diagonalizzabile su base ortonormale. Le radici del suo polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda-2)^2$ sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, autovalori con molteplicità algebriche m.a.$(0) = 2 =$ m.a.(2) e identiche molteplicità geometriche (per la diagonalizzabilità di f). Quindi $D = {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si ha $\mathrm{rk}(A - 0I) = n -$ m.g.$(0) = 4 - 2 = 2$ e il minore $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ di A formato da seconda e quarta riga e prima e quarta colonna ha det $= -2 \neq 0$, perciò nel sistema lineare $(A - 0I)x = 0$ si possono eliminare la prima e terza equazione e considerare le incognite x_2, x_3 parametri liberi, ottenendo $V_0 = \mathrm{Sol}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$ con base $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Analogamente, $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rk $= n -$ m.g.$(2) = 4 - 2 = 2$ e il minore centrale $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha det $= 2 \neq 0$, pertanto nel sistema lineare $(A - 2I)x = 0$ si eliminano la prima e la quarta equazione, si considerano le incognite x_1, x_4 parametri liberi e si ottiene $V_2 = \mathrm{Sol}(A - 2I, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_4 \in \mathbf{R} \right\}$ con base $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbf{R}^4$ che diagonalizza f, e pure la sua ortonormalizzata con Gram-Schmidt $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matrice $N = {}_{\mathcal{E}_3}i_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale perché è di cambiamento tra due basi ortonormali, perciò la base $\mathcal{B}$ diagonalizza simultaneamente f e b, perché ${}_{\mathcal{B}}b_{\mathcal{B}} = {}^tNAN = N^{-1}AN = {}_{\mathcal{B}}f_{\mathcal{B}} = D$.