

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (9 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(\sin n, n \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \log(1+x_n), \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Soluzione: a) Detta (x_n, y_n) la successione, abbiamo che (x_n) è limitata ma non convergente, mentre $y_n \rightarrow 1$. Di conseguenza la successione non ammette limite.

b) Detta $f(x) = \log(1+x)$, abbiamo che $f(0) = 0$ e $0 < f(x) < x$ per ogni $x > 0$. Poiché $x_0 = 1 > 0$, per induzione abbiamo che $x_n > 0$ per ogni n (dal momento che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$) e che $x_{n+1} < x_n$ per ogni n (dal momento che $f(x) < x$ per ogni $x > 0$). La successione converge dunque monotonamente all'unico punto fisso $\bar{x} = 0$ di f .

Esercizio n. 2 – (9 pt) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{3 + e^{-n}} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \right) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{n^2 + 1} \quad (x > 0).$$

Soluzione: a) La serie è a termini non negativi. Poiché $a_n \leq (2/3)^n$, la serie converge per il criterio del confronto. In alternativa si può usare il criterio della radice.

b) Abbiamo che $|a_n| \sim n^{-3/2}$; applicando il criterio del confronto asintotico concludiamo dunque che la serie è assolutamente convergente.

c) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto; abbiamo che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|,$$

dunque la serie converge assolutamente per $0 < x < 1$. Per $x \geq 1$ abbiamo che $a_n \not\rightarrow 0$, dunque la serie non è convergente.

Esercizio n. 3 – (8 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione è continua in $(0, +\infty)$; inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Il primo limite ci dice che f non può essere uniformemente continua in $(0, 2]$, e dunque nemmeno su $(0, +\infty)$; il secondo ci dice invece che è uniformemente continua in $[2, +\infty)$.

Esercizio n. 4 – (5 pt) Dimostrare che se $(\mathbf{x}_k)$ e $(\mathbf{y}_k)$ sono due successioni di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, allora la successione numerica $(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|)$ è convergente.

Soluzione: Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon/2, \quad \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_m\| < \varepsilon/2, \quad \forall k, m \geq N.$$

Posto $a_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|$ avremo dunque che

$$|a_k - a_m| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| + \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_m\| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N.$$

Di conseguenza (a_k) è di Cauchy e dunque convergente in $\mathbb{R}$.

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (9 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(\frac{n \cos n}{n+1}, n(e^{1/n} - 1) \right) \quad \begin{cases} x_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+x_n}, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Soluzione: a) Detta (x_n, y_n) la successione, abbiamo che (x_n) è limitata ma non convergente, mentre $y_n \rightarrow 1$. Di conseguenza la successione non ammette limite.

b) Detta $f(x) = 1 - 1/(1+x)$, abbiamo che $f(0) = 0$ e $0 < f(x) < x$ per ogni $x > 0$. Poiché $x_0 = 1 > 0$, per induzione abbiamo che $x_n > 0$ per ogni n (dal momento che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$) e che $x_{n+1} < x_n$ per ogni n (dal momento che $f(x) < x$ per ogni $x > 0$). La successione converge dunque monotonamente all'unico punto fisso $\bar{x} = 0$ di f .

Esercizio n. 2 – (9 pt) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \sin n}{\log n} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2 + 1)e^n}{n!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \arctan \frac{1}{n} \quad (x > 0).$$

Soluzione: a) La serie è a termini non negativi. Poiché $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$, la serie converge per il criterio della radice.

b) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto; abbiamo che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0,$$

concludiamo dunque che la serie è assolutamente convergente.

c) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto; abbiamo che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|,$$

dunque la serie converge assolutamente per $0 < x < 1$. Per $x > 1$ abbiamo che $|a_n| \rightarrow +\infty$, dunque la serie non è convergente. Per $x = 1$ abbiamo che $|a_n| \sim 1/n$, dunque la serie non è assolutamente convergente; tuttavia, la serie è a termini di segno alternato e $|a_n|$ converge monotonamente a 0, dunque è semplicemente convergente per il criterio di Leibniz.

Esercizio n. 3 – (8 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione è continua in $(0, +\infty)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, f non può essere uniformemente continua in $(0, 2]$, e dunque nemmeno su $(0, +\infty)$. Inoltre $f(x) = \sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$ è la somma di una funzione Hölderiana e di una funzione che ha asintoto orizzontale, quindi è uniformemente continua in $[2, +\infty)$. (In alternativa si può dimostrare che f è Lipschitziana su tale semiretta.)

Esercizio n. 4 – (5 pt) Sia E un sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}$; dimostrare che E ammette massimo e minimo.

Soluzione: Poiché E è non vuoto e limitato, esistono finiti $M = \sup E$, $m = \inf E$. Consideriamo M : per definizione di estremo superiore, o M è un punto isolato di E (e in tal caso appartiene ad E), oppure è un punto di accumulazione di E . In questo secondo caso abbiamo che $M \in E$ poiché E è chiuso, e quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Per dimostrare che $m \in E$ si ragiona in maniera del tutto analoga.

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (9 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(n \sin \frac{1}{n}, n^2 - n\right) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Soluzione: a) Detta (x_n, y_n) la successione, abbiamo che $x_n \rightarrow 1$, mentre $y_n \rightarrow +\infty$. Di conseguenza la successione diverge a ∞ .

b) Detta $f(x) = \sqrt{1+x}$, abbiamo che l'unico punto fisso di f è $\bar{x} = (1 + \sqrt{5})/2$ (soluzione positiva di $x^2 - x - 1 = 0$). Inoltre $f(x) > x$ per $-1 \leq x < \bar{x}$, mentre $f(x) < x$ per $x > \bar{x}$. Poiché $1 \leq f(x) < \bar{x}$ per ogni $0 \leq x < \bar{x}$ e $x_0 = 0$, avremo che $0 \leq x_n < \bar{x}$ per ogni n . Inoltre $f(x) > x$ per tali valori di x , dunque $x_{n+1} > x_n$ per ogni n . Concludiamo quindi che (x_n) converge monotonamente al punto fisso $\bar{x}$.

Esercizio n. 2 – (9 pt) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+1)e^{\sin n}}{4n} \right]^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \log \frac{n+1}{n} \quad (x > 0).$$

Soluzione: a) La serie è a termini non negativi. Poiché $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq e/4 < 1$, la serie converge per il criterio della radice.

b) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del confronto asintotico; abbiamo che

$$|a_n| = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{3/2}};$$

concludiamo dunque che la serie è assolutamente convergente.

c) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto; abbiamo che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|,$$

dunque la serie converge assolutamente per $0 < x < 1$. Per $x > 1$ abbiamo che $|a_n| \rightarrow +\infty$, dunque la serie non è convergente. Per $x = 1$ abbiamo che $|a_n| \sim 1/n$, dunque la serie non è assolutamente convergente; tuttavia, la serie è a termini di segno alternato e $|a_n|$ converge monotonamente a 0, dunque è semplicemente convergente per il criterio di Leibniz.

Esercizio n. 3 – (8 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) + \sqrt{x} - 2$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione è continua in $(0, +\infty)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$, la funzione è prolungabile con continuità su $[0, +\infty)$ e dunque è uniformemente continua in $(0, 2]$. Inoltre f è la somma di una funzione Hölderiana ($\sqrt{x}$) e di una funzione che ha asintoto orizzontale; di conseguenza è uniformemente continua in $[2, +\infty)$. Essendo uniformemente continua sia in $(0, 2]$ che in $[2, +\infty)$, lo sarà anche in $(0, +\infty)$.

Esercizio n. 4 – (5 pt) Siano E ed F due sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$; dimostrare che, se E è compatto, allora anche $E \cap F$ è compatto.

Soluzione: Poiché E ed F sono chiusi, anche $E \cap F$ è chiuso. Inoltre, per il teorema di Heine-Borel, E è anche limitato, e dunque anche $E \cap F \subseteq E$ sarà limitato. Di conseguenza, $E \cap F$ è compatto per il teorema di Heine-Borel. Dimostrazione alternativa: se $(\mathbf{x}_k)$ è una successione in $E \cap F$, allora, poiché E è compatto, essa ha un'estratta convergente a un punto $\mathbf{x} \in E$. D'altra parte, poiché F è chiuso, tale punto appartiene anche a F , e dunque $E \cap F$ è compatto.

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (9 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right), n - \cos n \right) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \\ x_0 = 3. \end{cases}$$

Soluzione: a) Detta (x_n, y_n) la successione, abbiamo che $x_n \rightarrow -1/2$, mentre $y_n \rightarrow +\infty$. Di conseguenza la successione diverge a ∞ .

b) Detta $f(x) = \sqrt{2+x}$, abbiamo che l'unico punto fisso di f è $\bar{x} = 2$ (soluzione positiva di $x^2 - x - 2 = 0$). Inoltre $f(x) > x$ per $-1 \leq x < \bar{x}$, mentre $f(x) < x$ per $x > \bar{x}$. Poiché $f(x) > \bar{x}$ per ogni $x > \bar{x}$ e $x_0 = 3 > \bar{x}$, avremo che $x_n > \bar{x}$ per ogni n . Inoltre $f(x) < x$ per tali valori di x , dunque $x_{n+1} < x_n$ per ogni n . Concludiamo quindi che (x_n) converge monotonamente al punto fisso $\bar{x} = 2$.

Esercizio n. 2 – (9 pt) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2+\cos n}}{\log n} \right]^n \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n \log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \log \frac{n^2+1}{n^2} \quad (x > 0).$$

Soluzione: a) La serie è a termini non negativi. Poiché $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$, la serie converge per il criterio della radice.

b) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del confronto asintotico; abbiamo che

$$|a_n| \sim \frac{1}{n^{3/2} \log n};$$

concludiamo dunque che la serie è assolutamente convergente.

c) Studiamo la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto; abbiamo che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|,$$

dunque la serie converge assolutamente per $0 < x < 1$. Per $x > 1$ abbiamo che $|a_n| \rightarrow +\infty$, dunque la serie non è convergente. Per $x = 1$ abbiamo che $|a_n| \sim 1/n^2$, dunque la serie è assolutamente convergente.

Esercizio n. 3 – (8 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \left(e^{1/\sqrt{x}} - 1 \right) + x - 3$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione è continua in $(0, +\infty)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, la funzione non è uniformemente continua in $(0, 2]$, e dunque nemmeno in $(0, +\infty)$. Inoltre f è la somma di una funzione Lipschitziana $(x-3)$ e di una funzione che ha asintoto orizzontale; di conseguenza è uniformemente continua in $[2, +\infty)$.

Esercizio n. 4 – (5 pt) Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$; dimostrare che $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Mostrare con degli esempi che, in generale, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ e $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

Soluzione: Se $\mathbf{x} \in (A \cap B)^\circ$, allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(\mathbf{x}) \subseteq A \cap B$, vale a dire $B_r(\mathbf{x}) \subseteq A$ e $B_r(\mathbf{x}) \subseteq B$, cioè $\mathbf{x} \in A^\circ \cap B^\circ$. Viceversa, se $\mathbf{x} \in A^\circ \cap B^\circ$, allora esistono $r_1, r_2 > 0$ tali che $B_{r_1}(\mathbf{x}) \subseteq A$, $B_{r_2}(\mathbf{x}) \subseteq B$; posto $r = \min\{r_1, r_2\}$ avremo che $B_r(\mathbf{x}) \subseteq A \cap B$, cioè $\mathbf{x} \in (A \cap B)^\circ$. Per gli esempi basta prendere $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ nel primo caso, e $A = (0, 1]$, $B = [1, 2)$ nel secondo caso.