Analisi Matematica I – Prova in itinere del 08/06/2011	**A**
COGNOME: ________________ NOME: ________________	
CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)	
PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglio	

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx.$$

Soluzione: Sì: $f(x) \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$; $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$.

Esercizio n. 2 – (6 pt) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E della successione di funzioni

$$f_n(x) = x^{-n}\,\log(nx)$$

e individuare i sottoinsiemi di E nei quali la convergenza è uniforme.

Soluzione: $E = (1, +\infty)$; conv. unif. in $[a, +\infty)$, $a > 1$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+3x)^n}{n^2+3}\,.$$

Soluzione: Conv. totale in $E = [-1, -1/3]$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: Int. gen. $y = Ae^x + Be^{2x} - xe^x$; Sol. PdC: $A = -2$, $B = 2$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,ds$$

dove $\gamma(t) = (t, t, 1-t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Soluzione: $I = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Esercizio n. 6 – (4 pt*) Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in $\overline{E}$, convergente uniformemente in E. Dimostrare che $(f_n)_n$ converge uniformemente in $\overline{E}$. Cosa si può dire se $(f_n)_n$ converge solo puntualmente?

Analisi Matematica I – Prova in itinere del 08/06/2011 **B**

COGNOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| NOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglio

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2-1}\,dx.$$

Soluzione: No: $f(x) \sim \frac{e^{-1}}{2(x-1)}$ per $x \to 1$.

Esercizio n. 2 – (6 pt) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E della successione di funzioni

$$f_n(x) = x^{-\sqrt{n}} \log(\sqrt{n}\,x)$$

e individuare i sottoinsiemi di E nei quali la convergenza è uniforme.

Soluzione: $E = (1, +\infty)$; conv. unif. in $[a, +\infty)$, $a > 1$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2+4}\,.$$

Soluzione: Conv. totale in $E = [2, 3]$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Int. gen. $y = Ae^{-x} + Be^{2x} - xe^{-x}$; Sol. PdC: $A = 1/3$, $B = 2/3$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^2+y}{\sqrt{2+4z^2}}\,ds$$

dove $\gamma(t) = (t, t^2-4, t)$, $t \in [-2, 2]$.

Soluzione: $I = -\frac{16}{3}$

Esercizio n. 6 – (4 pt*) Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in $\mathbb{R}$, convergenti uniformemente in $\mathbb{R}$ ad una funzione f, e tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è periodica di periodo $T_n > 0$. Dimostrare che se $\lim_n T_n = T \in (0, +\infty)$, allora f è periodica di periodo T. Che cosa si può dire di f se $\lim_n T_n = 0$?

Analisi Matematica I – Prova in itinere del 08/06/2011	**C**
COGNOME: ⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋ NOME: ⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋⌊⌋	
CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)	
PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglio	

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+x^2)}\,dx.$$

Soluzione: Sì: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$; $|f(x)| \le \frac{1}{x^3}$ per $x \to +\infty$.

Esercizio n. 2 – (6 pt) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2x}{nx^2 + 2^{-\sqrt{n}}}$$

e individuare i sottoinsiemi di E nei quali la convergenza è uniforme.

Soluzione: $E = \mathbb{R}$; conv. unif. in $[a, +\infty)$, $(-\infty, -a]$, $a > 0$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n(n+1)}\,.$$

Soluzione: Conv. totale in $E = [-1, 0]$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos(2x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Int. gen. $y = A\cos(2x) + B\sin(2x) + x\sin(2x)$; Sol. PdC: $A = 1$, $B = 0$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{16 + y^2 + z^2}}\,ds$$

dove $\gamma(t) = (1 + t^2, 2t, 2t)$, $t \in [0, 1]$.

Soluzione: $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Esercizio n. 6 – (4 pt*) Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in $\overline{E}$, convergente uniformemente in E. Dimostrare che $(f_n)_n$ converge uniformemente in $\overline{E}$. Cosa si può dire se $(f_n)_n$ converge solo puntualmente?

Analisi Matematica I – Prova in itinere del 08/06/2011	**D**
COGNOME: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴	NOME: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴
CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)	
PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglio	

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx.$$

Soluzione: Sì: $f(x) \sim \log x$ per $x \to 0^+$; $|f(x)| \le \frac{1}{x^{3/2}}$ definitivamente per $x \to +\infty$.

Esercizio n. 2 – (6 pt) Determinare l'insieme di convergenza puntuale E della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2x}{\sqrt{n}\,x^2 + 3^{-n}}$$

e individuare i sottoinsiemi di E nei quali la convergenza è uniforme.

Soluzione: $E = \mathbb{R}$; conv. unif. in $[a,+\infty)$, $(-\infty,-a]$, $a > 0$.

Esercizio n. 3 – (pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{1+n^2}\,.$$

Soluzione: Conv. totale in $E = [0, 2/3]$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = 6\sin(3x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: Int. gen. $y = A\cos(3x) + B\sin(3x) - x\cos(3x)$; Sol. PdC: $A = 0$, $B = 2/3$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^2+z}{\sqrt{5+4y^2}}\,ds$$

dove $\gamma(t) = (2t, t, t^2+4)$, $t \in [0,2]$.

Soluzione: $I = \frac{64}{3}$

Esercizio n. 6 – (4 pt*) Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in $\mathbb{R}$, convergenti uniformemente in $\mathbb{R}$ ad una funzione f, e tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è periodica di periodo $T_n > 0$. Dimostrare che se $\lim_n T_n = T \in (0,+\infty)$, allora f è periodica di periodo T. Che cosa si può dire di f se $\lim_n T_n = 0$?