

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Cresta)PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglioRECUPERO ESONERO: ☐ I (Es. 1,2,3) ☐ II (Es. 4,5,6,7)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(\frac{n^2 + \log n}{2^n + 1}, \frac{n + \sin n}{\sqrt{n}} \right), \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{2} - 2^{-x_n}, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Soluzione: (a) $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow +\infty$; la successione diverge a ∞ . (b) La successione è monotona crescente e converge a 1.

Esercizio n. 2 – (4 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \log x + 2x$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 1]$, $[1, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione può essere prolungata con continuità nell'origine, quindi è unif. cont. in $(0, 1]$. Inoltre $f \in C^1((0, +\infty))$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$, quindi f' è limitata in $[1, +\infty)$. Di conseguenza f è Lipschitziana e dunque unif. cont. anche in $[1, +\infty)$. Infine f è unif. cont. in $(0, +\infty) = (0, 1] \cup [1, +\infty)$.

Esercizio n. 3 – (4 pt) Trovare i punti interni e i punti di frontiera dell'insieme

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (2n, 2n+1).$$

Soluzione: E è unione di intervalli aperti, quindi è aperto, cioè $E^\circ = E$. Inoltre $\partial E = \{2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare insieme di definizione, asintoti orizzontali e verticali e intervalli di monotonia della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t} e^{-t} dt.$$

Soluzione: La funzione integranda $f(t)$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi $\text{dom} F = \mathbb{R}$, F è derivabile e $F'(x) = f(x)$. Di conseguenza $F' < 0$ in $(-\infty, 0)$, mentre $F' > 0$ in $(0, +\infty)$. L'origine è un punto di minimo assoluto e $F(0) = 0$. Poiché f non è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0)$ avremo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$; f è invece integrabile in senso generalizzato in $(0, +\infty)$, quindi esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, x_n], \\ n\sqrt{x - x_n}, & \text{se } x \in (x_n, 1], \end{cases} \quad \text{con } x_n := 1 - \frac{1}{n^3}.$$

Stabilire se la successione di funzioni (f_n) converge puntualmente e uniformemente in $[0, 1]$.

Soluzione: Abbiamo che $\lim_n x_n = 1$. Di conseguenza, se $x \in [0, 1)$, avremo che $x_n > x$ definitivamente e dunque $f_n(x) = 0$ definitivamente. Poiché $f_n(1) = 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$, concludiamo che f converge puntualmente in $[0, 1]$ alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$. Si verifica che, per ogni n , f_n è non negativa e monotona crescente; di conseguenza $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi la successione converge uniformemente in $[0, 1]$.

Esercizio n. 6 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Soluzione: Abbiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \sim x/n^{3/2}$, dunque la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dal momento che $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 1/\sqrt{n}$, la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$. Per ogni $a > 0$ si ha invece $\sup_{|x| \leq a} |f_n(x)| \leq a/n^{3/2}$, dunque la serie converge totalmente sugli intervalli del tipo $[-a, a]$.

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} + \frac{\log x}{x} = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Integrale generale: $y = cx + 1 + \log |x|$, nelle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Soluzione del PdC: $y = -x + 1 + \log x$, $x \in (0, +\infty)$.

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Cresta)PROVA ORALE: ☐ giugno ☐ luglioRECUPERO ESONERO: ☐ I (Es. 1,2,3) ☐ II (Es. 4,5,6,7)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(\frac{\sqrt{n} + n + 2}{1 + \log(n+1)}, \frac{2 + \cos n}{n^2 + 1} \right), \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + x_n}, \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Soluzione: (a) $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow 0$; la successione diverge a ∞ . (b) La successione è monotona decrescente e converge a 1.

Esercizio n. 2 – (4 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = x \log x + 3x^2$$

è uniformemente continua negli intervalli $(0, 1]$, $[1, +\infty)$, $(0, +\infty)$.

Soluzione: La funzione può essere prolungata con continuità nell'origine, quindi è unif. cont. in $(0, 1]$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +\infty$, quindi f non è sub-lineare e dunque non può essere uniformemente continua né in $[1, +\infty)$ né su $(0, +\infty)$.

Esercizio n. 3 – (4 pt) Trovare i punti interni e i punti di frontiera dell'insieme

$$E = \left\{ x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}^+, q \text{ dispari} \right\}.$$

Soluzione: Poiché $E \subset \mathbb{Q}$, $E^\circ = \emptyset$. Più precisamente, E contiene tutti i razionali in $[1, +\infty)$ con denominatore dispari, che sono densi in $[1, +\infty)$. Di conseguenza $\overline{E} = \partial E = [1, +\infty)$.

Esercizio n. 4 – (6 pt) Determinare insieme di definizione, asintoti orizzontali e verticali e intervalli di monotonia della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t-1} dt.$$

Soluzione: La funzione integranda $f(t)$ non è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $t = 1$, dal momento che $f(t) \sim e/(t-1)$ per $t \rightarrow 1$. Di conseguenza $\text{dom} F = (-\infty, 1)$. Poiché f è continua in $(-\infty, 1)$, avremo che F è ivi derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x < 1$; di conseguenza $F'(x) < 0$ per ogni $x < 1$. Per quanto già detto, $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -\infty$; inoltre, dal momento che f è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0)$, esiste finito $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, x_n], \\ n\sqrt[3]{x - x_n}, & \text{se } x \in (x_n, 1], \end{cases} \quad \text{con } x_n := 1 - \frac{1}{n^4}.$$

Stabilire se la successione di funzioni (f_n) converge puntualmente e uniformemente in $[0, 1]$.

Soluzione: Abbiamo che $\lim_n x_n = 1$. Di conseguenza, se $x \in [0, 1)$, avremo che $x_n > x$ definitivamente e dunque $f_n(x) = 0$ definitivamente. Poiché $f_n(1) = 1/\sqrt[3]{n} \rightarrow 0$, concludiamo che f converge puntualmente in $[0, 1]$ alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$. Si verifica che, per ogni n , f_n è non negativa e monotona crescente; di conseguenza $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = 1/\sqrt[3]{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi la successione converge uniformemente in $[0, 1]$.

Esercizio n. 6 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \left(1 + \frac{|x|}{n} \right).$$

Soluzione: Abbiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \sim |x|/n^{3/2}$, dunque la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dal momento che $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty$, la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$. Per ogni $a > 0$ si ha invece $\sup_{|x| \leq a} |f_n(x)| \leq a/n^{3/2}$, dunque la serie converge totalmente sugli intervalli del tipo $[-a, a]$.

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \cos x - \frac{1}{2} \sin(2x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione: Integrare generale: $y = c e^{\sin x} + \sin x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Soluzione del PdC: $y = 3e^{\sin x} + \sin x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.