

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)PROVA ORALE: ☐ luglio ☐ settembre

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (2+3 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left((\sqrt{n} + \cos n) \log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right), n(\sqrt{n^2 + 2} - n) \right), \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{\sin(1/n^2)}{(2/n^2)} x_n, \\ x_0 = 5. \end{cases}$$

Soluzione: (a) Converge a $(2, 1)$. (b) Converge a 0.

Esercizio n. 2 – (4 pt) Trovare i punti interni, di frontiera, di accumulazione e la chiusura dell'insieme

$$E = (0, 1] \cup \{2\} \cup (3, +\infty).$$

Soluzione: $\overset{\circ}{E} = (0, 1) \cup (3, +\infty)$; $\partial E = \{0, 1, 2, 3\}$; $E' = [0, 1] \cup [3, +\infty)$; $\overline{E} = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\log(1 + |x|)}{|x|^\alpha} dx.$$

Soluzione: $\alpha \in (1, 2)$

Esercizio n. 4 – (4 pt) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 x^2 e^{-nx^2} dx.$$

Soluzione: La successione di funzioni converge uniformemente alla funzione identicamente nulla; per il teorema di passaggio al limite sotto al segno di integrale, l'integrale richiesto vale 0.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)3^n}.$$

Soluzione: Conv. puntuale in $[-2, 4)$; uniforme in $[-2, b]$ per ogni $b \in (2, 4)$; totale in $[-2 + \delta, 4 - \delta]$ per ogni $\delta \in (0, 3)$.

Esercizio n. 6 – (3 pt) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = (2 \cos^2 t, 2 \sin^2 t), \quad t \in [\pi/2, \pi].$$

Facoltativo: disegnare il sostegno della curva γ .

Soluzione: $L = 2\sqrt{2}$; il sostegno della curva è il segmento che congiunge $P = (0, 2)$ con $Q = (2, 0)$.

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x^2 - 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: Integrale generale: $y(x) = a + b e^{-2x} + x^3/6 - x^2/4 - x/4$; soluzione del PdC: $a = 13/8$, $b = -5/8$.