

COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (2+3 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(n \sin \frac{2}{n}, \frac{e^n - 1}{n^2} \right), \quad \begin{cases} x_{n+1} = 1 + \log(2 + x_n), \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Soluzione: (a) $x_n \rightarrow 1/2$, $y_n \rightarrow +\infty$; la successione diverge a ∞ . (b) (x_n) è una successione monotona crescente convergente a $\bar{x} \simeq 2.505$.

Esercizio n. 2 – (4 pt) Posto $A = (1, 4) \cup (4, 5)$, trovare i punti interni, di frontiera, di accumulazione e la chiusura dell'insieme

$$E = (0, +\infty) \setminus A.$$

Soluzione: $\overset{\circ}{E} = (0, 1) \cup (5, +\infty)$; $\partial E = \{0, 1, 4, 5\}$; $E' = [0, 1] \cup [5, +\infty)$; $\overline{E} = [0, 1] \cup \{4\} \cup [5, +\infty)$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Soluzione: Detta $f(x)$ la funzione integranda, si ha $f \in C((0, +\infty))$; poiché esiste finito $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/2$, la funzione è integrabile in $(0, 1)$. Inoltre $0 \leq f(x) \leq 2/x^2$, quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato in $(1, +\infty)$ e, di conseguenza, su tutto $(0, +\infty)$.

Esercizio n. 4 – (4 pt) Stabilire gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n + x^2}, \quad n \geq 1.$$

Soluzione: La successione di funzioni converge puntualmente alla funzione $f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$. Poiché $f(x) - f_n(x) = \frac{x^4}{n + x^2}$, la convergenza è uniforme solo sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x - 1)^n}{2^n(2 + n)}.$$

Soluzione: Conv. puntuale in $[-1/2, 3/2)$; uniforme in $[-1/2, b]$ per ogni $b \in (-1/2, 3/2)$; totale in $[-1/2 + \delta, 3/2 - \delta]$ per ogni $\delta \in (0, 1)$.

Esercizio n. 6 – (3 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4y}} ds$$

dove $\gamma(t) = (e^t, t^2)$, $t \in [1, 2]$.

Soluzione: $I = 1$

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 6xe^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: Integrale generale: $y(x) = ae^x + be^{4x} - (x^2 + 2x/3)e^x$; soluzione del PdC: $a = -5/9$, $b = 5/9$.