Analisi Matematica I – Prova scritta del 16/09/2011 **A**

COGNOME: ___________________ NOME: ___________________

CANALE: ☐ A-H (Pacella) ☐ I-Z (Crasta)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (2+3 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(3n(e^{1/n}-1)\,,\ \left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right), \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 1 + x_n - \log(x_n)\,, \\ x_0 = 2\,. \end{cases}$$

Soluzione: (a) $x_n \to 3$, $y_n \to e^2$. (b) Converge monotonamente a $\bar{x} = e$.

Esercizio n. 2 – (4 pt) Trovare i punti interni, di frontiera, di accumulazione e la chiusura dell'insieme

$$E = \left\{\pm\frac{1}{n}\,:\ n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Soluzione: $\overset{\circ}{E} = \emptyset$; $\partial E = E \cup \{0\}$; $E' = \{0\}$; $\overline{E} = E \cup \{0\}$.

Esercizio n. 3 – (6 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3 \log x}\, dx\,.$$

Soluzione: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, quindi la funzione è integrabile su $(1, e)$; $0 < f(x) < 1/x^2$ per $x > e$, quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato su $(1, +\infty)$. Di conseguenza l'integrale di partenza è convergente.

Esercizio n. 4 – (4 pt) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = (x^2 - x^4)^n\,, \qquad x \in [0, 1]\,.$$

Soluzione: Limite puntuale $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$. Inoltre $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1/\sqrt{2}) = 4^{-n} \to 0$, quindi la successione converge uniformemente in $[0, 1]$.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^3}\,.$$

Soluzione: Converge totalmente (quindi anche uniformemente e puntualmente) in $[-1/3, 1/3]$.

Esercizio n. 6 – (3 pt) Calcolare la lunghezza della curva in coordinate polari

$$\rho(\theta) = e^{-\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Soluzione: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$.

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}\, y + \dfrac{1}{x(1+x^2)}\,, \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione: Integrale generale: $y = \frac{1}{1+x^2}(c + \log x)$; soluz. del PdC: $c = 0$