COGNOME: _____

NOME: _____

CANALE: A-H (Pacella) I-Z (Cresta)

PROVA ORALE: TASSATIVAMENTE QUESTO APPELLO

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (2+3 pt) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\left(\frac{\cos n + n + 2}{\sqrt{n} + n^2}, n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3^{x_n} - 1, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Soluzione: (a) $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow +\infty$; la successione diverge a ∞ . (b) Diverge a $+\infty$.

Esercizio n. 2 – (3 pt) Trovare i punti interni, di frontiera, di accumulazione e la chiusura dell'insieme

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1) \subseteq \mathbb{R}.$$

Soluzione: $\overset{\circ}{E} = E$; $\partial E = \mathbb{N}$; $E' = [0, +\infty)$; $\overline{E} = [0, +\infty)$.

Esercizio n. 3 – (5 pt) Stabilire se è convergente il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx.$$

Soluzione: Converge.

Esercizio n. 4 – (4 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Soluzione: Sì.

Esercizio n. 5 – (4 pt) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-1/(x^2+n)}.$$

Soluzione: Conv. puntualmente e uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio n. 6 – (4 pt) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (1 + 2x) ds, \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} \right), \quad t \in [0, 1].$$

Soluzione: $I = (4\sqrt{2} - 1)/5$.

Esercizio n. 7 – (5 pt) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 3x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione: Integrale generale: $y(x) = a + b e^{-x} + 3x^2/2 - 4x$; soluzione del PdC: $a = 6$, $b = -6$.