

Analisi Matematica I: primo esonero 20/04/2015

Gruppo esercizi 1: Spazi metrici

Osservazione: le funzioni proposte sono tutte del tipo $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$. A secondo membro abbiamo due distanze; una è quella euclidea in $\mathbb{R}$, l'altra è del tipo $\delta(z_1, z_2) := |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|$, con z_1, z_2 appartenenti a un intervallo aperto I , e con $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva. Di conseguenza d è sempre una distanza sullo spazio X indicato.

[E.1] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + \left| \frac{1}{y_1 e^{y_1}} - \frac{1}{y_2 e^{y_2}} \right|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.

Nota: Non è completo; considerare una successione con $y_n \rightarrow +\infty$.

[E.2] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left| \frac{x_1}{4 - x_1^2} - \frac{x_2}{4 - x_2^2} \right| + |y_1 - y_2|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := (-2, 2) \times \mathbb{R}$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.

Nota: È completo.

[E.3] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left| \frac{e^{x_1}}{1 + e^{x_1}} - \frac{e^{x_2}}{1 + e^{x_2}} \right| + |y_1 - y_2|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R}^2$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.

Nota: Non è completo; considerare una successione con $x_n \rightarrow \pm\infty$.

[E.4] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + \left| \frac{y_1 |y_1|}{1 + y_1^2} - \frac{y_2 |y_2|}{1 + y_2^2} \right|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R}^2$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.

Nota: Non è completo; considerare una successione con $y_n \rightarrow \pm\infty$.

Gruppo esercizi 2: Integrali impropri

Osservazione: la funzione integranda f è continua nella semiretta aperta $(0, +\infty)$. L'integrale si può spezzare negli intervalli $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$, e lo studio della convergenza dei due integrali risultati si effettua studiando l'andamento di f in 0 e a $+\infty$.

[E.5] (7 pt) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Nota: Sì: $0 < f(x) \leq \frac{e}{\sqrt{x(1+x)}} \in \mathcal{R}_g((0, +\infty))$.

[E.6] (7 pt) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Nota: Sì: $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \in \mathcal{R}_g((0, 1])$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{4/3}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

[E.7] (7 pt) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Nota: Sì: $f(x) \sim \frac{-\log x}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

[E.8] (7 pt) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Nota: Sì: $f(x) \rightarrow \pi/2$ per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$.

Gruppo esercizi 3: Uniforme continuità

[E.9] (7 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) := x \log x, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.

Nota: La funzione f può essere estesa con continuità su $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 0$. Di conseguenza è uniformemente continua in $(0, 1]$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +\infty$, per il teorema della farfalla non è uniformemente continua in $[1, +\infty)$, e dunque nemmeno in $(0, +\infty)$.

[E.10] (7 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) := x e^{1/x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.

Nota: Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, la funzione non è uniformemente continua in $(0, 1]$ (e, di conseguenza, nemmeno in $(0, +\infty)$). Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ e $f \in C([1, +\infty))$, per il teorema dell'asintoto la funzione è uniformemente continua in $[1, +\infty)$. (In alternativa si può dimostrare che f è Lipschitziana in $[1, +\infty)$ facendo vedere che ha derivata limitata in tale semiretta.)

[E.11] (7 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.

Nota: La funzione f può essere estesa con continuità su $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 0$. Di conseguenza è uniformemente continua in $(0, 1]$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $f \in C([1, +\infty))$, per il teorema dell'asintoto la funzione è uniformemente continua in $[1, +\infty)$. Infine, f è uniformemente continua anche su $(0, +\infty)$.

[E.12] (7 pt) Stabilire se la funzione

$$f(x) := \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.

Nota: Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, la funzione non è uniformemente continua in $(0, 1]$ (e, di conseguenza, nemmeno in $(0, +\infty)$). Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $f \in C([1, +\infty))$, per il teorema dell'asintoto la funzione è uniformemente continua in $[1, +\infty)$.

Gruppo esercizi 4: Successioni di funzioni

[E.13] (8 pt) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \log \left(\frac{n}{1 + nx^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la successione converge uniformemente su $(0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$.

Nota: La successione converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f(x) = \log \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Non c'è convergenza uniforme in $(0, 1]$ perchè qui f non è limitata mentre le f_n lo sono. C'è convergenza uniforme in $[1, 2]$ e $[2, +\infty)$ perchè

$$\left| \log \left(\frac{n}{1 + nx^2} \right) - \log \left(\frac{1}{x^2} \right) \right| = \log \left(1 + \frac{1}{nx^2} \right) \leq \log \left(1 + \frac{1}{na^2} \right)$$

per ogni $x \in [a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

[E.14] (8 pt) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \arctan \left(\frac{n^2 x^2}{1 + n} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la successione converge uniformemente su $(0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$.

Nota: La successione converge puntualmente a $\frac{\pi}{2}$ se $x \neq 0$ e a 0 se $x = 0$. Non c'è convergenza uniforme in $(0, 1]$ perchè se $x_n = 1/n^2$ allora $\sup_{(0,1]} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| \geq |f_n(x_n) - \frac{\pi}{2}| > 0$. La convergenza è uniforme in $[a, +\infty)$ perchè

$$\sup_{[a, +\infty)} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \sup_{[a, +\infty)} \frac{\pi}{2} - f_n(x) \leq \frac{\pi}{2} - f_n(a).$$

Quindi c'è convergenza uniforme in $[1, 2]$ e $[2, +\infty)$.

[E.15] (8 pt) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{n}{1 + nx^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la successione converge uniformemente su $(0, 2]$, $[1, 2]$, $[1, +\infty)$.

Nota: La successione converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Il limite puntuale non è limitato in $(0, a]$ per ogni $a > 0$, mentre le f_n lo sono, quindi la successione non può convergere uniformemente in $(0, 2]$. Facendo i conti si ha

$$\left| \sqrt{\frac{n}{1+nx^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1+nx^2)nx^2} + \sqrt{(1+nx^2)^2nx^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1+na^2)na^2} + \sqrt{(1+na^2)^2na^4}}$$

per ogni $x \in [a, +\infty)$ con $a > 0$. Quindi la successione converge uniformemente in $[1, 2]$ e in $[1, +\infty)$.

[E.16] (8 pt) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{nx^2 + 1}{n^2 + \sqrt{n}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la successione converge uniformemente su $(0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$.

Nota: La successione tende puntualmente a 0 in $\mathbb{R}$. Converge uniformemente in $[0, 1]$ e in $[1, 2]$ perché

$$|f_n(x)| \leq f_n(a) \quad \forall x \in [0, a].$$

Mentre non converge uniformemente in $[2, +\infty)$ perché f_n non è limitata.

Gruppo esercizi 5: Facoltativi

[E.17] (FACOLTATIVO) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e $\{g_n\}$, con $g_n : E \rightarrow [a, b]$, una successione di funzioni che converge uniformemente a g su E , dimostrare che $\{f(g_n(\cdot))\}$ converge uniformemente a $f(g(\cdot))$.

È ancora vero se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}$ e l'immagine di g_n non necessariamente limitata? Provare o mostrare un controesempio.

Nota: Si mostra usando l'uniforme continuità di f . Se $g_n(E)$ non è limitato non più necessariamente vero ($g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ e $f(x) = x^2$).

[E.18] (FACOLTATIVO) Siano $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ due successioni convergenti uniformemente su E rispettivamente a f e g . Supponiamo che E sia compatto e che f_n e g_n siano continue per ogni n in E ; provare che $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a fg su E .

È ancora vero senza richiedere che le funzioni f_n e g_n siano continue o che E sia compatto? Provare o mostrare un controesempio.

Nota: Le funzioni f_n e g_n sono continue in un compatto quindi sono limitate. I limiti f e g sono quindi limitati. Si dimostra inoltre che le successioni (f_n) e (g_n) sono equilimitate. Usando l'equilimitatezza si prova che il prodotto converge uniformemente. Senza assumere una delle due proprietà si può perdere la limitatezza e la conclusione non è più vera ($f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ e $g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ o anche $f_n(x) = \arctan x + \frac{1}{n}$ e $g_n(x) = x$, infatti è sufficiente che una delle due non sia limitata).