

TEMI D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1

GRAZIANO CRASTA E LUIGI ORSINA, A.A. 2013/14

1. SPAZI METRICI, TOPOLOGIA, COMPLETEZZA

Esercizio 1.1. Dimostrare che la funzione

$$d(x, y) := \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è una distanza su $\mathbb{R}$. Stabilire se lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo. Stabilire anche se la topologia di $(\mathbb{R}, d)$ coincide con quella di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Esercizio 1.2. Dimostrare che la funzione

$$d(x, y) := |\tan(x) - \tan(y)| \quad x, y \in X := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo. Stabilire anche se la topologia di (X, d) coincide con quella di $(X, |\cdot|)$.

Esercizio 1.3. Dimostrare che la funzione

$$d(x, y) := |e^{2x} - e^{2y}| \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è una distanza su $\mathbb{R}$. Stabilire se lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo. Stabilire anche se la topologia di $(\mathbb{R}, d)$ coincide con quella di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Esercizio 1.4. Dimostrare che la funzione

$$d(x, y) := \left| \frac{x}{1 - x^2} - \frac{y}{1 - y^2} \right| \quad x, y \in X := (-1, 1),$$

è una distanza su X . Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo. Stabilire anche se la topologia di (X, d) coincide con quella di $(X, |\cdot|)$.

Esercizio 1.5. Sia, in $\mathbb{R}^2$,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \arctan(|y_1 - y_2|).$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è completo.

Esercizio 1.6. Sia, in $\mathbb{R}^2$,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |\arctan(y_1) - \arctan(y_2)|.$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, d)$ non è completo.

Esercizio 1.7. Sia, in $\mathbb{R}^2$,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|}.$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è completo.

Esercizio 1.8. Sia, in $\mathbb{R}^2$,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \left| \frac{e^{y_1}}{1 + e^{y_1}} - \frac{e^{y_2}}{1 + e^{y_2}} \right|.$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, d)$ non è completo.

Esercizio 1.9. Sia d_2 la metrica euclidea nel piano; siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Se $O = (0, 0)$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$, definiamo

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_2(P, Q) & \text{se } P, Q \in A \text{ oppure } P, Q \in B, \\ d_2(P, O) + d_2(O, Q) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che d è una distanza, e **disegnare** $B_2((0, 1))$.

Esercizio 1.10. Sia d_2 la metrica euclidea nel piano; siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. Se $O = (0, 0)$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$, definiamo

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_2(P, Q) & \text{se } P, Q \in A \text{ oppure } P, Q \in B, \\ d_2(P, O) + d_2(O, Q) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che d è una distanza, e **disegnare** $B_2((1, 0))$.

Esercizio 1.11. Sia d_2 la metrica euclidea nel piano; siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Se $O = (0, 0)$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$, definiamo

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_2(P, Q) & \text{se } P, Q \in A \text{ oppure } P, Q \in B, \\ d_2(P, O) + d_2(O, Q) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che d è una distanza, e **disegnare** $B_2((0, 1))$.

Esercizio 1.12. Sia d_2 la metrica euclidea nel piano; siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. Se $O = (0, 0)$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$, definiamo

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_2(P, Q) & \text{se } P, Q \in A \text{ oppure } P, Q \in B, \\ d_2(P, O) + d_2(O, Q) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che d è una distanza, e **disegnare** $B_2((1, 0))$.

Esercizio 1.13. Sia $X = (-2, 2)$ e

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{4 - x^2} - \frac{y}{4 - y^2} \right|.$$

Dopo aver dimostrato che d è una distanza su X , si dimostri che lo spazio (X, d) è completo.

Esercizio 1.14. Sia $X = \mathbb{R}$ e

$$d(x, y) = |x^5 - y^5|.$$

Dopo aver dimostrato che d è una distanza su X , si dimostri che lo spazio (X, d) è completo.

2. UNIFORME CONTINUITÀ

Esercizio 2.1. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \frac{x}{1+x^2} \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Esercizio 2.2. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \arctan \sqrt{x} + \log(1+x), \quad x \in [0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2.3. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2.4. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t^2+1} dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2.5. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \sqrt{x} \log x, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Esercizio 2.6. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Esercizio 2.7. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Esercizio 2.8. Stabilire se la funzione

$$f(x) := \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

è uniformemente continua in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Esercizio 2.9. Sia

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad x > 0.$$

Si dimostri che f è uniformemente continua su $[1, +\infty)$. Dopo aver verificato che $f(2/n) - f(1/n)$ non tende a zero, si discuta l'uniforme continuità di f su $(0, 1]$.

Esercizio 2.10. Sia

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+t^3)} dt, \quad x > 0.$$

Senza calcolare l'integrale, si dimostri che f è uniformemente continua su $[1, +\infty)$. Dopo aver verificato che $f(2/n) - f(1/n)$ non tende a zero, si discuta l'uniforme continuità di f su $(0, 1]$.

3. SUCCESSIONI DI FUNZIONI E IN SPAZI METRICI

Esercizio 3.1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{1 + \cos(nx)}{1 + n^4 x^4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;
- (b) stabilire se la successione converge uniformemente su $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$;
- (c) calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx.$$

Esercizio 3.2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{2 + \arctan(nx)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;
- (b) stabilire se la successione converge uniformemente su $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$;
- (c) calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx.$$

Esercizio 3.3. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{3 - \arctan(nx)}{1 + n^4 x^4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;
- (b) stabilire se la successione converge uniformemente su $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$;
- (c) calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx.$$

Esercizio 3.4. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{4 - \cos(nx)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare il limite puntuale e l'insieme di convergenza puntuale;
- (b) stabilire se la successione converge uniformemente su $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$;
- (c) calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx.$$

Esercizio 3.5. Sia

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^3}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di f_n su $[0, 1]$ e su $[1, +\infty)$.

Esercizio 3.6. Sia

$$f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di f_n su $[0, 1]$ e su $[1, +\infty)$.

4. SERIE DI POTENZE, DI FOURIER E DI FUNZIONI

Esercizio 4.1. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}.$$

Detta $s(x)$ la somma, calcolare $\int_0^{1/2} s(x) dx$.

Esercizio 4.2. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Detta $s(x)$ la somma, calcolare $s''(0)$.

Esercizio 4.3. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \log(n)}.$$

Detta $s(x)$ la somma, calcolare $s''(0)$.

Esercizio 4.4. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$

Detta $s(x)$ la somma, calcolare $\int_0^{1/2} s(x) dx$.

Esercizio 4.5. Data la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{3^k} x^{2k},$$

determinarne l'intervallo di convergenza puntuale, e discuterne la convergenza uniforme e totale; successivamente, detta $f(x)$ la somma della serie, si calcoli, giustificando i passaggi,

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Esercizio 4.6. Data la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k 4^k} x^{2k},$$

determinarne l'intervallo di convergenza puntuale, e discuterne la convergenza uniforme e totale; successivamente, detta $f(x)$ la somma della serie, si calcoli, giustificando i passaggi, $f'(1)$.

Esercizio 4.7. Data la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{3k+1}{8^k} x^{3k},$$

determinarne l'intervallo di convergenza puntuale, e discuterne la convergenza uniforme e totale; successivamente, detta $f(x)$ la somma della serie, si calcoli, giustificando i passaggi,

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Esercizio 4.8. Data la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k 3^{k+1}} x^{3k},$$

determinarne l'intervallo di convergenza puntuale, e discuterne la convergenza uniforme e totale; successivamente, detta $f(x)$ la somma della serie, si calcoli, giustificando i passaggi, $f'(1)$.

Esercizio 4.9. Sia, per x in $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi)$.

Esercizio 4.10. Sia, per x in $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi/2)$.

Esercizio 4.11. Sia, per x in $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi/2)$.

Esercizio 4.12. Sia, per x in $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza. Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $S(\pi)$.

Esercizio 4.13. Sia, per x in $(-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Si discuta la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f . Si calcolino i coefficienti di Fourier di f . Detta $S(x)$ la somma della serie, si calcoli $S(\pi)$.

Esercizio 4.14. Sia, per x in $(-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Si discuta la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f . Si calcolino i coefficienti di Fourier di f . Detta $S(x)$ la somma della serie, si calcoli $S(\pi)$.

Esercizio 4.15. Sia, per x in $(-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ -2 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Si discuta la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f . Si calcolino i coefficienti di Fourier di f . Detta $S(x)$ la somma della serie, si calcoli $S(\pi)$.

Esercizio 4.16. Sia, per x in $(-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Si discuta la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f . Si calcolino i coefficienti di Fourier di f . Detta $S(x)$ la somma della serie, si calcoli $S(\pi)$.

Esercizio 4.17. Sia $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ per x in $(-\pi, \pi]$, e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Scrivere la serie di Fourier di f , e studiarne la convergenza.

Esercizio 4.18. Sia $f(x) = |x| - \pi$ per x in $(-\pi, \pi]$, e si consideri f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$. Scrivere la serie di Fourier di f , e studiarne la convergenza.

5. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Esercizio 5.1. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità di f nell'origine. Dato $v = (v_1, v_2)$, con $v_1^2 + v_2^2 = 1$, calcolare $\partial f / \partial v$ nell'origine.

Esercizio 5.2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità di f nell'origine. Dato $v = (v_1, v_2)$, con $v_1^2 + v_2^2 = 1$, calcolare $\partial f / \partial v$ nell'origine.

Esercizio 5.3. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy^3)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità di f nell'origine. Dato $v = (v_1, v_2)$, con $v_1^2 + v_2^2 = 1$, calcolare $\partial f / \partial v$ nell'origine.

Esercizio 5.4. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(x^2 y^2) - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità di f nell'origine. Dato $v = (v_1, v_2)$, con $v_1^2 + v_2^2 = 1$, calcolare $\partial f / \partial v$ nell'origine.

Esercizio 5.5. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua, direzionalmente derivabile, differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.6. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua, direzionalmente derivabile, differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.7. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y^4}{x^4 + y^6}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua, direzionalmente derivabile, differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.8. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^4 y^3}{x^6 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua, direzionalmente derivabile, differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.9. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x y^2 & \text{se } y \geq x, \\ x^2 y & \text{se } y < x. \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine. La funzione è continua su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 5.10. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & \text{se } y \geq x, \\ x y^2 & \text{se } y < x. \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine. La funzione è continua su $\mathbb{R}^2$?

6. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizio 6.1. Determinare le soluzioni massimali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^t \sqrt{x}, \\ x(\log 3) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6.2. Determinare le soluzioni massimali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{x}}{1+t^2}, \\ x(0) = \pi^2/64. \end{cases}$$

Esercizio 6.3. Determinare le soluzioni massimali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3t^2 \sqrt[3]{x}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6.4. Determinare le soluzioni massimali del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^{-t} \sqrt[3]{x}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6.5. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \frac{2t}{1+t^2} x + b(t),$$

con $b \in C(\mathbb{R})$.

(a) Si determini l'integrale generale dell'equazione nel caso $b(t) = t$.

(b) Sia b una funzione continua e limitata in $\mathbb{R}$ e sia x la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0$. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t) - x_0]/t$.

Esercizio 6.6. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \frac{4t^3}{1+t^4} x + b(t),$$

con $b \in C(\mathbb{R})$.

(a) Si determini l'integrale generale dell'equazione nel caso $b(t) = t^3$.

(b) Sia b una funzione continua e limitata in $\mathbb{R}$ e sia x la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0$. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t) - x_0]/t$.

Esercizio 6.7. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \frac{2t}{1+t^2} x + b(t),$$

con $b \in C(\mathbb{R})$.

(a) Si determini l'integrale generale dell'equazione nel caso $b(t) = 1$.

(b) Sia b una funzione continua e limitata in $\mathbb{R}$ e sia x la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0$. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t) - x_0]/t$.

Esercizio 6.8. Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \frac{e^t}{1 + e^t} x + b(t),$$

con $b \in C(\mathbb{R})$.

(a) Si determini l'integrale generale dell'equazione nel caso $b(t) = e^t$.

(b) Sia b una funzione continua e limitata in $\mathbb{R}$ e sia x la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = 0$. Si calcoli $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)/t$.

Esercizio 6.9. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = C e^t \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Scrivere la soluzione del problema per $C = 0$ e per $C = 2$.

Esercizio 6.10. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = C e^{2t} \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Scrivere la soluzione del problema per $C = 0$ e per $C = 2$.

Esercizio 6.11. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = C e^{-2t} \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Scrivere la soluzione del problema per $C = 0$ e per $C = 2$.

Esercizio 6.12. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = C e^{-3t} \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Scrivere la soluzione del problema per $C = 0$ e per $C = 2$.

Esercizio 6.13. Dato il problema di Cauchy

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = -4e^{-2t}, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0,$$

determinare per quale valore di a si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Esercizio 6.14. Dato il problema di Cauchy

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -4e^{2t}, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0,$$

determinare per quale valore di a si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0.$$