ANALISI MATEMATICA I

per Ingegneria Aerospaziale

– Soluzioni della prova scritta del 10.6.2011 –

ESERCIZIO 1 (fila $\diamondsuit$)

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|3 - \operatorname{tg}^2 x|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, classificazione degli eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico qualitativo.

Soluzione:

Dominio: $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Segno funzione: $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, si annulla solo per $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Simmetrie: la funzione è pari.

Periodicità: f è periodica di periodo π.

Dal momento che la funzione pari e di periodo π studieremo la funzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$.

Limiti significativi: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Quindi la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale.

Eliminazione del modulo:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 x} & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \\[2ex] \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3} & x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Continuità: f è continua nel suo dominio.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 x}} & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \\[3ex] \dfrac{\operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}} & x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\infty\,, \quad f'_+\left(\frac{\pi}{3}\right) = +\infty\,,$$

quindi f non è derivabile (cuspide) in $x = \frac{\pi}{3}$.

Crescenza, decrescenza, estremi relativi ed assoluti: f è strettamente crescente in $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, ha un minimo assoluto (non regolare) in $x = \frac{\pi}{3}$, un massimo relativo in $x = 0$.

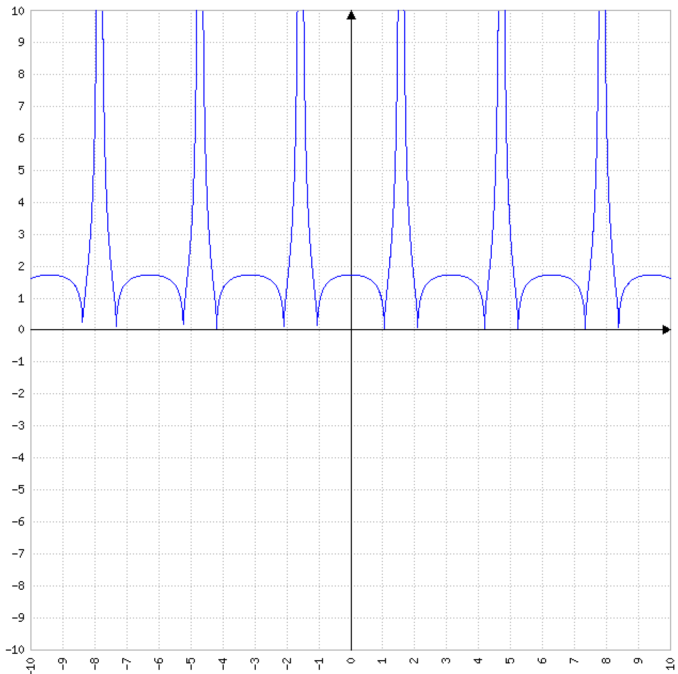
Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2\operatorname{tg}^4 x - 9\operatorname{tg}^2 x - 3)}{(3 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{3}{2}}} & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \\[3ex] \dfrac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2\operatorname{tg}^4 x - 9\operatorname{tg}^2 x - 3)}{(\operatorname{tg}^2 x - 3)^{\frac{3}{2}}} & x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Convessità, concavità, flessi:

Posto $x_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{9 + \sqrt{105}}}{2}\right)$, f risulta convessa in $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right)$, concava in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e in $\left[\frac{\pi}{3}, x_1\right]$.

Il grafico è il seguente:



ESERCIZIO 2 (fila $\diamondsuit$)

Calcolare

$$\int_a^b \operatorname{tg} x\,\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx$$

dopo aver scelto a piacere a e b distinti tra loro.

Soluzione:

Osserviamo che bisogna scegliere l'intervallo $[a, b]$ in modo che non contenga i punti della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \operatorname{tg} x\,\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\sqrt{\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}}$$

Supponendo di integrare in un intervallo contenuto in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (in modo che il coseno sia positivo), si può integrare per sostituzione ($\cos x = t$) e poi per parti, ottenendo le seguenti primitive:

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} - \log(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}) + c =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} - \operatorname{settsh}(\cos x) + c.$$

Pertanto prendendo (ad esempio) $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{4}$, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right).$$

Altre sostituzioni possibili sono $\operatorname{tg} x = t$, oppure direttamente $\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} = t$. Si osservi inoltre che la funzione è dispari, quindi prendendo a e b opposti tra loro, l'integrale viene zero, e questa è una soluzione perfettamente accettabile dell'esercizio.

ESERCIZIO 3 (fila $\diamondsuit$) Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare dei parametri reali α e x:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log(3+n)}{n^2+5}\right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(3+n)}{n^2+5}\,(x-4)^n.$$

Soluzione:

Si ha: $\frac{\log(3+n)}{n^2+5} \sim \frac{\log n}{n^2}$

Per $\alpha \le 0$, la serie diverge (il termine non è infinitesimo).

Per $\alpha > 0$, $\left(\frac{\log(3+n)}{n^2+5}\right)^{\alpha} \sim \frac{\log^{\alpha} n}{n^{2\alpha}}$. Quindi il termine della serie:

- tende a zero più lentamente di $\frac{1}{n^{2\alpha}}$
- tende a zero più velocemente di $\frac{1}{n^{\beta}}$, $\forall \beta < 2\alpha$

Per il confronto asintotico, la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

La seconda serie è una serie di potenze, avente raggio di convergenza 1 (criterio del rapporto, per es.). La serie converge se e solo se $3 \le x \le 5$.

ESERCIZIO 4 (fila $\diamondsuit$) Data la funzione $f(x) = \sqrt{ax^2 + 2bx}$, trovare tutti i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che valga ciascuna delle seguenti proprietà (ciascuna domanda va risolta separatamente dalle altre):

a) il dominio sia costituito da un solo intervallo;

b) f verifichi le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[1, 2]$;

c) f sia crescente in un intorno di $x = 5$;

d) f ammetta massimo relativo per $x = 1$.

Soluzione:

a) $a \le 0$, oppure $a > 0, b = 0$.

b) $f(1) = f(2) \Longrightarrow 3a + 2b = 0$. In tal caso gli zeri della funzione sono 0 e 3. Basta scegliere $a \le 0$, $b = -\frac{3}{2}a$, per esser sicuri che la funzione sia continua e derivabile in $[1, 2]$.

c) $f'(5) = \frac{5a+b}{\sqrt{25a+10b}}$.

$$f'(5) > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 5a + b > 0 \\ 25a + 10b > 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b > -5a \\ a \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b > -\frac{5}{2}a \\ a \ge 0 \end{cases}$$

d) $b = -a$, $a \le 0$.

ESERCIZIO 5 (fila $\diamondsuit$)

Risolvere l'equazione

$$z^3 = i|z|^2$$

nel campo complesso.

Soluzione:

Le soluzioni sono quattro:

$$z_1 = 0\,; \quad z_2 = -i\,; \quad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,; \quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,.$$

Per risolvere l'equazione si può scrivere $z = a + ib$, e risolvere il sistema per la parte reale e la parte immaginaria, oppure in coordinate polari $z = \rho e^{i\theta}$. L'equazione in forma polare è

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

ESERCIZIO 1 (fila $\clubsuit$)

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|3\operatorname{tg}^2 x - 1|}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, classificazione degli eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità e convessità, flessi. Disegnarne un grafico

---

Soluzione:

Dominio: $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Segno funzione: $f(x) \ge 0$, $\forall x \in D$, si annulla solo per $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Simmetrie: la funzione è pari.

Periodicità: f è periodica di periodo π.

Dal momento che la funzione pari e di periodo π studieremo la funzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$.

Limiti significativi: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Quindi la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale.

Eliminazione del modulo:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\,x} & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \\ \sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x - 1} & x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Continuità: f è continua nel suo dominio.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -3\dfrac{\mathrm{tg}\,x\,(1+\mathrm{tg}^2\,x)}{\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\,x}} & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \\ \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,x\,(1+\mathrm{tg}^2\,x)}{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x-1}} & x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$f'_-(\frac{\pi}{6}) = -\infty\,, \quad f'_+(\frac{\pi}{6}) = +\infty\,,$$

quindi f non è derivabile (cuspide) in $x = \frac{\pi}{6}$.

Crescenza, decrescenza, estremi relativi ed assoluti: f è strettamente crescente in $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, strettamente decrescente in $[0, \frac{\pi}{6}]$, ha un minimo assoluto (non regolare) in $x = \frac{\pi}{6}$, un massimo relativo in $x = 0$.

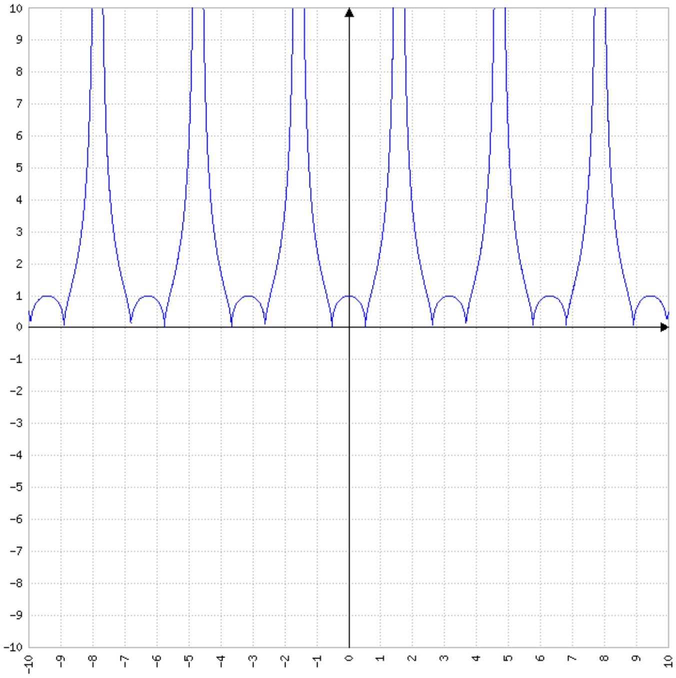
Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3(1+\mathrm{tg}^2\,x)(6\,\mathrm{tg}^4\,x - 3\,\mathrm{tg}^2\,x - 1)}{(1-3\,\mathrm{tg}^2\,x)^{\frac{3}{2}}} & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \\ \dfrac{3(1+\mathrm{tg}^2\,x)(6\,\mathrm{tg}^4\,x - 3\,\mathrm{tg}^2\,x - 1)}{(3\,\mathrm{tg}^2\,x - 1)^{\frac{3}{2}}} & x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Convessità, concavità, flessi:

Posto $x_1 = \mathrm{arctg}\,(\frac{\sqrt{3+\sqrt{33}}}{\sqrt{12}})$, f risulta convessa in $[x_1, \frac{\pi}{2})$, concava in $[0, \frac{\pi}{6}]$ e in $[\frac{\pi}{6}, x_1]$.

Il grafico è il seguente:



ESERCIZIO 2 (fila ♣)

Calcolare

$$\int_a^b \mathrm{tg}\,x\,\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x + 1}\,dx$$

dopo aver scelto a piacere a e b distinti tra loro.

Soluzione:

Osserviamo che bisogna scegliere l'intervallo $[a, b]$ in modo che non contenga i punti della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x + 1}\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\sqrt{\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^2 x}}$$

Supponendo di integrare in un intervallo contenuto in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (in modo che il coseno sia positivo), si può integrare per sostituzione ($\cos x = t$) e poi per parti, ottenendo le seguenti primitive:

$$\frac{\sqrt{3-2\cos^2 x}}{\cos x} + \sqrt{2}\arcsin(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos x) + c$$

Pertanto prendendo (ad esempio) $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{6}$, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}\,x\,\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x + 1}\,dx = \sqrt{2} + \sqrt{2}\frac{\pi}{4} - 1 - \sqrt{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Altre sostituzioni possibili sono $\mathrm{tg}\,x = t$, oppure direttamente $\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\,x + 1} = t$. Si osservi inoltre che la funzione è dispari, quindi prendendo a e b opposti tra loro, l'integrale viene zero, e questa è una soluzione perfettamente accettabile dell'esercizio.

ESERCIZIO 3 (fila ♣) Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare dei parametri reali α e x:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log(1+n^2)}{\sqrt{n+5}}\right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n^2)}{\sqrt{n+5}}\,(x+1)^n\,.$$

Soluzione:

Si ha: $\dfrac{\log(1+n^2)}{\sqrt{n+5}} \sim \dfrac{2\log n}{\sqrt{n}}$

Per $\alpha \leq 0$, la serie diverge (il termine non è infinitesimo).
Per $\alpha > 0$, $\left(\dfrac{\log(1+n^2)}{\sqrt{n+5}}\right)^\alpha \sim 2^\alpha \dfrac{\log^\alpha n}{n^{\alpha/2}}$. Quindi il termine della serie:

- tende a zero più lentamente di $\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$
- tende a zero più velocemente di $\dfrac{1}{n^\beta}$, $\forall \beta < \alpha/2$

Per il confronto asintotico, la serie converge se e solo se $\alpha > 2$.
La seconda serie è una serie di potenze, avente raggio di convergenza 1 (criterio del rapporto, per es.). La serie converge se e solo se $-2 \leq x < 0$.

ESERCIZIO 4 (fila ♣) Data la funzione $f(x) = \log(ax^2 + bx)$, trovare tutti i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che valga ciascuna delle seguenti proprietà (ciascuna domanda va risolta separatamente dalle altre):
a) il dominio sia costituito da due semirette;
b) f verifichi le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[1, 2]$;
c) f sia crescente in un intorno di $x = 3$;
d) f ammetta massimo relativo per $x = 2$.

Soluzione:

a) $a > 0$.
b) $f(1) = f(2) \Longrightarrow 3a + b = 0$. In tal caso gli zeri dell'argomento della funzione $ax^2 + bx$ sono 0 e 3. Basta scegliere $a < 0$, $b = -3a$, per esser sicuri che la funzione sia continua e derivabile in $[1, 2]$.
c) $f'(3) = \dfrac{6a + b}{9a + 3b}$.

$$f'(3) > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 6a + b > 0 \\ 9a + 3b > 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b > -6a \\ a \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b > -3a \\ a \geq 0 \end{cases}$$

d) $b = -4a$, $a < 0$.

ESERCIZIO 5 (fila ♣) Risolvere l'equazione

$$z^3 = -|z|^2$$

nel campo complesso.

Soluzione:

Le soluzioni sono quattro:

$$z_1 = 0\,; \quad z_2 = -1\,; \quad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \quad z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Per risolvere l'equazione si può scrivere $z = a + ib$, e risolvere il sistema per la parte reale e la parte immaginaria, oppure in coordinate polari $z = \rho e^{i\theta}$. L'equazione in forma polare è

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \rho^2 e^{i\pi}.$$
