

1 Foglio n. 1 di esercizi: integrali doppi

1.1 Integrazione senza cambi di coordinate

1.1 Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 1, y \geq x\}$$

e scomporlo in domini normali rispetto ad una delle due variabili. (esercizio svolto durante l'esercitazione)

1.2 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^4 \left(\int_{\frac{2}{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

1.3 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x-1}}^{\ln(x+1)} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

1.4 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^6}^{4-x} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili. (esercizio svolto durante l'esercitazione)

1.5 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{-e^x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

1.6 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{1-x^4}^{2-2x^4} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili. (Esercizio assegnato alla prova di teoria del 4 luglio 2007).

1.7 Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 2y \geq x-1, y \leq 1-x\}$$

e scrivere una formula di riduzione per

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

per ogni funzione continua f . (Esercizio assegnato alla prova di teoria del 19 luglio 2007).

1.8 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x^2-2x+2} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili. (Esercizio assegnato alla prova di teoria del 19 luglio 2007).

1.9 Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

e scrivere una formula di riduzione per

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

per ogni funzione continua f . (Esercizio assegnato alla prova di teoria dell'11 settembre 2007, si può anche fare in coordinate polari).

1.10 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x^2-2x+2} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili. (Esercizio assegnato alla prova di teoria dell'11 settembre 2007).

1.11 Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{\arctg x}^{4-x^6} f(x, y) dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f , e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

1.12 Mediante un cambio di variabile, calcolare

$$\iint_D (x+y) dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) : 0 < x < y < 2x, 1 < xy < 2\}.$$

(esercizio svolto a lezione)

1.13 Calcolare il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 3)$. (esercizio svolto durante l'esercitazione)

1.14 Esempio 14.2 (pag. 367) del libro di testo.

1.15 Esempio 14.3 (pag. 368) del libro di testo (esempio svolto a lezione).

1.16 Esempio 14.4 (pag. 368) del libro di testo.

1.17 Esercizio 14.1 (pag. 368) del libro di testo.

1.18 Esercizio 14.2 (pag. 371) del libro di testo.

1.19 Esempio 14.7 (pag. 373) del libro di testo.

1.20 Esempio 14.8 (pag. 373) del libro di testo (esempio svolto a lezione).

1.21 Esempio 14.9 (pag. 374) del libro di testo.

1.22 Esempio 14.10 (pag. 375) del libro di testo.

1.23 Esercizio 14.3 (pag. 375) del libro di testo.

1.24 Esercizio 14.4 (pag. 376) del libro di testo.

1.25 Esercizio 14.5 (pag. 376) del libro di testo. *Attenzione: negli esercizi a), c) d) il testo è errato; per il testo corretto si consulti l'errata corrige del libro all'indirizzo internet <http://www.dmmm.uniroma1.it/~giacomelli/errata-corrige.pdf>*

1.26 Calcolare

$$\iint_E |x+y| dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$.

1.27 Calcolare

$$\iint_A \frac{1}{(|x|+|y|)^\gamma} dx dy, \quad \gamma > 0$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 1 \leq |x| + |y| \leq 3\}$$

1.28 Calcolare

$$\iint_A \max\{x, y\} dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2 \leq \max\{x, y\} \leq 4, xy > 0\}$$

1.29 Calcolare

$$\iint_E xy dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y^2 < x < \sqrt{y}\}$.

1.30 Calcolare

$$\iint_E xy dx dy,$$

dove

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \leq y \leq \min\left\{1, \ln \frac{1}{x}\right\} \right\}.$$

1.2 Integrazione con cambi di coordinate

1.31 Esempio 14.11 (pag. 378) del libro di testo.

1.32 Esempio 14.12 (pag. 379) del libro di testo.

1.33 Esempio 14.13 (pag. 379) del libro di testo.

1.34 Esempio 14.14 (pag. 380) del libro di testo.

1.35 Esempio 14.15 (pag. 380) del libro di testo.

1.36 Esercizio 14.6 (pag. 381) del libro di testo.

1.37 Esercizio 14.7 (pag. 381) del libro di testo.

1.38 Esercizio 14.8 (pag. 381) del libro di testo.

1.39 Esempio 14.16 (pag. 382) del libro di testo. *Attenzione: il testo è errato; per il testo corretto si consulti l'errata corrige del libro all'indirizzo internet <http://www.dmmm.uniroma1.it/~giacomelli/errata-corrige.pdf>.*

1.40 Esempio 14.17 (pag. 382) del libro di testo (esempio svolto a lezione).

1.41 Esempio 14.18 (pag. 382) del libro di testo.

1.42 Esempio 14.19 (pag. 383) del libro di testo.

1.43 Esercizio 14.9 (pag. 384) del libro di testo.

1.44 Dato l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq |y| - 2\},$$

calcolare

$$\iint_E x^2 dx dy.$$

(Esercizio tratto dalla prova pratica del 4 luglio 2007).

1.45 Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$$

e scrivere una formula di riduzione per

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

per ogni funzione continua f . (Esercizio assegnato alla prova di teoria del 4 luglio 2007).

1.46 Calcolare

$$\iint_E \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y\}$.

1.47 Calcolare

$$\iint_E (x + y^2) dx dy,$$

dove $E = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

1.48 Trovare l'area di $E = \{(x, y) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 8x\}$.

1.49 Calcolare il volume dell'ellissoide $E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$.

1.50 Calcolare

$$\iint_E (x + y) dx dy,$$

dove E è l'intersezione del cerchio di centro l'origine e raggio 1, del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1, e del semipiano $y \leq x$.

1.51 Calcolare l'integrale

$$\iint_D \ln(4 + x - y) dx dy,$$

dove D è il parallelogramma avente per vertici i punti $(0, 0)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(2, -1)$.

(Suggerimento: usare un opportuno cambiamento di coordinate). Soluzione disponibile all'indirizzo internet http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-2002_01_09_soluz.pdf