Facoltà di Ingegneria
Civile e Industriale

Sapienza
Università di Roma

Elaborato finale per il conseguimento
della Laurea in Ingegneria aerospaziale

Appendice alla Tesi di Laurea: "Il problema di Newton di minima resistenza"

Candidato: Andrea Gallegati
Matricola: 1468208

Relatore: prof. Andrea Dall'Aglio
SSD: Analisi Matematica

Abstract. In questa Appendice sono state riportate tutte le dimostrazioni omesse nella Tesi [1] per mantenere l'elaborato entro la lunghezza massima fissata. Sono inoltre richiamate varie definizioni. Vengono infine riportati tutti i passaggi con cui si sono ricavate le espressioni più importanti, che non hanno trovato spazio nella Tesi.

1. Classi di funzioni ammissibili

Come detto nella Tesi, B. Kawohl in [2] studia anche il problema estendendolo a classi di funzioni più ampie di C_M. Ne mostriamo qui di seguito un importante esempio.

1.1. Condizione del singolo urto

Oltre alla classe delle funzioni concave C_M si possono trovare anche altre classi di funzioni ammissibili, più ampie della precedente e nelle quali quindi si potrebbero trovare delle soluzioni ancora più efficienti.
Per esempio se si impone al corpo l'ipotesi geometrica (meno restrittiva) di rispettare la *condizione del singolo urto*, ovvero che la traiettoria delle particelle riflesse nel punto $(x, u(x))$ resti al di sopra del profilo u, tale profilo dovrà rispettare la seguente relazione:

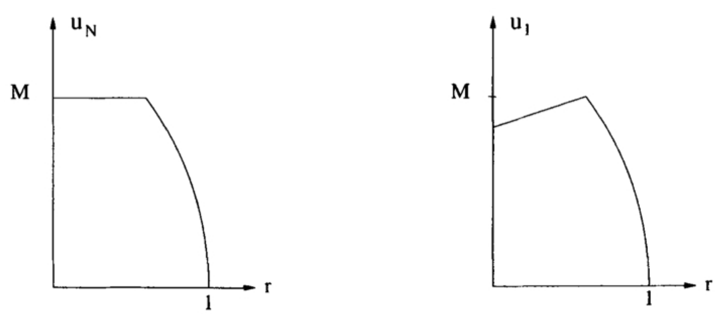

Figura 1: Soluzione ottimale di Newton u_N e la modifica u_1.

$$u(y) \leq \ u(x) + \frac{1}{2}\left(u'(x) - \frac{1}{u'(x)}\right)(y - x)\ , \qquad y > x\ . \quad (1)$$

Inutile dire che per le funzioni concave di C_M vale la (1). In realtà C_M non è altro che una sottoclasse della più ampia classe di funzioni verificanti la (1). Infatti le funzioni

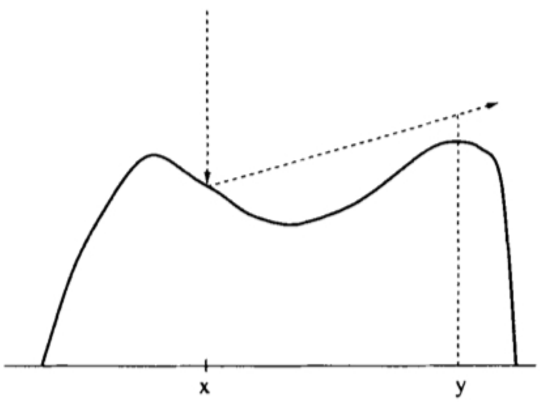

Figura 2: Profilo che rispetta la condizione del singolo urto.

concave soddisfano anche la condizione più forte:

$$u(y) \leq \ u(x) + u'(x)(y - x)\ , \qquad y > x\,. \tag{2}$$

In Fig. 1 vediamo un esempio (u_1) di funzione a simmetria radiale che soddisfa la condizione (1), ma non la (2). Infatti il profilo u_1 ottenuto dalla soluzione ottimale di Newton u_N dopo aver rimpiazzato la parte piatta con un cono rovesciato di apertura $2\pi/3$, ci garantisce ancora il rispetto della condizione di urto singolo pur non essendo evidentemente una funzione concava. Infatti ogni particella che cade all'interno del cono, viene riflessa in direzione radiale parallelamente al cono abbandonando il corpo senza urtarlo una seconda volta. Dato che questa funzione u_1 non ha gradiente nullo nella parte superiore, questo profilo avrà una resistenza minore rispetto al profilo ottimale u_N trovato da Newton. Pertanto la soluzione $u_1 \in S_M$ risulta essere più efficiente della $u_N \in C_M$ precedentemente trovata.
Abbiamo così trovato, per ora, due classi di funzioni ammissibili in cui cercare la soluzione del nostro problema,

$$C_M(B_R) := \Big\{ 0 \leq u \leq M,\ u \text{ concava} \Big\} \tag{2}$$

$$S_M(B_R) := \Big\{ 0 \leq u \leq M,\ u \text{ con singolo urto} \Big\} \tag{1}$$

Per ricavare l'espressione (1), con cui esprimiamo la condizione del singolo urto facciamo riferimento alla Fig. 2. Osserviamo che le velocità entrante v_i ed uscente v_f di una particella possono essere scomposte lungo i versori normale ν e tangenziale τ al profilo u nel punto x, proiettandole con un semplice prodotto scalare. Vale a dire:

$$v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \nu \right] \nu + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \tau \right] \tau$$

$$v_f = - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \nu \right] \nu + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \tau \right] \tau\,,$$

dove in v_f si mantiene la componente tangenziale di v_i mentre si inverte quella normale. Adesso, dato che:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}\ ; \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} \begin{pmatrix} -u'(x) \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

ci possiamo calcolare esplicitamente la velocità di uscita della particella riflessa, che risulta essere

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} \begin{pmatrix} -2u'(x) \\ 1 - [u'(x)]^2 \end{pmatrix}$$

ovvero la traiettoria della particella riflessa avrà un'inclinazione pari a $\frac{1}{2}[u'(x) - 1/u'(x)]$, che prova (1).

2. Profilo a simmetria radiale

Nel caso particolare di profili concavi a simmetria radiale, la soluzione ottima venne già trovata in forma analitica da Newton. Riportiamo, qui di seguito, i principali passaggi necessari ad ottenere le espressioni (in [1]), da cui ricaveremo il profilo ottimale.

2.1. L'equazione di Eulero-Lagrange

Si riportano qui tutti i passaggi che portano all'equazione di Eulero-Lagrange, partendo dalla definizione della di derivata di Fréchet. Questo è infatti uno strumento fondamentale di cui ci serviremo per calcolare il minimo di $R(u)$.
In maniera del tutto simile alle funzioni di più variabili (variabili scali), bisogna che la variazione prima di $R(u)$, nella direzione della funzione test $\phi(r)$, vada a zero in corrispondenza della funzione minimizzante u. Si ottiene così l'equazione di Eulero-Lagrange associata, da integrare.

Dalla definizione:

$$\delta R(u,\phi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(R(u+t\phi)\Big)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^R \frac{r}{1+(u+t\phi)_r^2}\,dr\bigg|_{t=0}$$

si può adesso portare la derivata dentro l'integrale,

$$= \int_0^R \frac{2r(u_r+(t\phi)_r)(u_{rt}+\phi_r)}{\big(1+(u_r+(t\phi)_r)^2\big)^2}\,dr\bigg|_{t=0} = \int_0^R \frac{2r\,u_r\phi_r}{(1+u_r^2)^2}\,dr\,,$$

in cui molti termini si annullano dato che, per esempio, la u non dipende dalla t. Adesso si può applicare la formula d'integrazione per parti e quindi scrivere:

$$=\int_0^R \frac{2r\,u_r\phi_r}{(1+u_r^2)^2}\,dr = \frac{2r\,u_r}{(1+u_r^2)^2}\,\phi\bigg|_0^R - 2\int_0^R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r\,u_r}{(1+u_r^2)^2}\right)\phi\,dr$$

essendo la funzione test ϕ a supporto compatto, deve annullarsi sulla frontiera del dominio. Perciò, al secondo membro resterà solamente il secondo termine, ovvero la:

$$\delta R(u,\phi) = \int_0^R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r\,u_r}{(1+u_r^2)^2}\right)\phi\,dr \qquad (6)\,.$$

2.2. Forma parametrica del profilo ottimo

Dimostriamo come si ricava la forma parametrica della soluzione ottima del nostro problema, nel caso radiale. Partiamo dall'*equazione di Eulero-Lagrange*:

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{ru_r}{(1+u_r^2)^2}\right)\phi\,dr = 0 \implies \frac{ru_r}{(1+u_r^2)^2} = -c\,,$$

per essere nullo quest'integrale, indipendentemente dalla funzione test ϕ scelta, dev'essere per forza nulla la derivata rispetto ad r. Pertanto la quantità derivata risulterà per forza costante, più precisamente pari ad una costante negativa (dato che $u_r < 0$), e perciò $c > 0$.
A questo punto poniamo $t = -u_r$ e otteniamo in questo modo un'espressione per $r(t)$:

$$r(t) = c\,\frac{(1+t^2)^2}{t} = c\left(\frac{1+2t^2+t^4}{t}\right) = c\left(\frac{1}{t}+2t+t^3\right).$$

Applichiamo poi la regola della catena:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = t\,c\left(\frac{1}{t^2}-2-3t^2\right) = c\left(\frac{1}{t}-2t-3t^3\right),$$

integrando questa si ottiene un'espressione per la $u(t)$:

$$u(t) = \int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,dt = c\int\left(\frac{1}{t}-2t-3t^3\right)dt = c\left(\ln(t)-t^2-\frac{3}{4}t^4\right)+k,$$

dove k è una costante d'integrazione da determinarsi.
Per trovare il valore delle due costanti c e k occorre imporre una condizione nel punto di raccordo tra la parte piatta del profilo e quella inclinata. Sembra essere un mistero come Newton abbia intuito la corretta condizione al contorno: $u_r(r_0^+) = -1$, necessaria affinchè la soluzione trovata sia effettivamente un minimo. Oggi grazie agli sviluppi dell'analisi funzionale la si può ricavare applicando la *condizione di trasversalità* [3]. In alternativa lo si può provare dimostrando direttamente che in un intorno di quel punto la pendenza deve necessariamente avere tale valore, poiché altrimenti converrebbe modificare l'estensione della parte piatta (agendo su r_0 e perciò indirettamente su $u_r(r_0^+)$) per ottenere la minore resistenza possibile. Questa dimostrazione è riportata, di seguito, in questa Appendice.
Determinate le due costanti d'integrazione, che valgono:

$$u_r(r_0) = 1 \implies c = \frac{r_0}{4}\,; \quad u(1) = M \implies k = M + \frac{7}{16}r_0$$

giungiamo alla stessa soluzione parametrica che trovò a suo tempo Newton:

$$\begin{cases} r(t) = \dfrac{r_0}{4t}\,\left(1+t^2\right)^2 \\ u(t) = M - \dfrac{r_0}{4}\left(-\dfrac{7}{4}-\ln(t)+t^2+\dfrac{3}{4}t^4\right) \end{cases} \quad \forall t \in [1,T],$$

dove T è la massima pendenza del profilo, in $r = R$. Noto T si può ottenere r_0. Consideriamo la funzione $f(t)$, definita come:

$$f(t) = \frac{M-u(t)}{r(t)} = \frac{t}{(1+t^2)^2}\left(-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}t^4+t^2-\ln t\right), \quad \forall t \geq 1\,.$$

Questa è strettamente crescente e perciò invertibile. Calcolata in $t = T$, invertendola ci darà:

$$T = f^{-1}(M/R)\,, \qquad r_0 = \frac{4RT}{(1+T^2)^2}\,.$$

2.3. Punto di minima pendenza del profilo

Vogliamo dimostrare che nel punto di raccordo tra la parte piatta e la parte curva del profilo, la pendenza

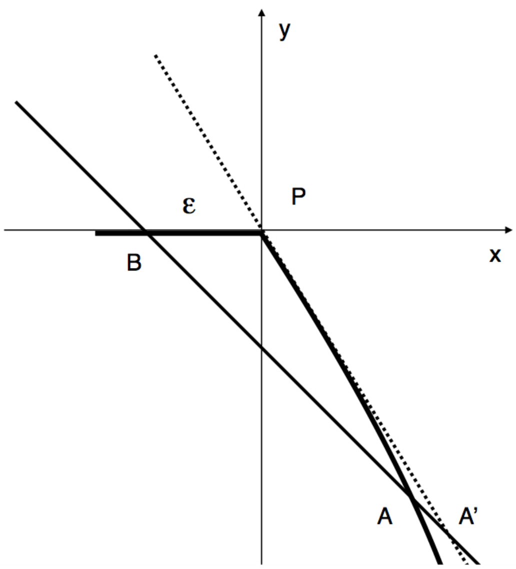

Figura 3: Condizione al contorno nel punto di raccordo.

vale proprio $u_r(r_0^+) = -1$. Abbiamo visto in [1] Thm. 3 che nel caso di profili concavi non simmetrici il valore assoluto della pendenza del profilo non può mai essere minore di 1. Perciò, per dimostrare adesso la necessità di questa condizione al contorno, sarà sufficiente mostrare che nel punto di raccordo il modulo della pendenza non può neanche essere maggiore di 1. Questo si può fare verificando che, dato un profilo u con pendenza $m > 1$ nel punto di raccordo, si può ottenere un profilo con minore resistenza “smussando” questo punto con un segmento di pendenza in modulo pari ad 1.

Pertanto facendo riferimento alla Fig. 3, dove per comodità si è centrato il sistema di riferimento proprio nel punto di raccordo P, calcoliamo la resistenza offerta da entrambi i profili nell’intorno di questo punto. Dato che ci troviamo in un intorno del punto P, in questa zona è lecito confondere il tratto curvo del nostro profilo con la sua retta tangente $y = -mx$. In questa maniera troviamo più facilmente il punto d’intersezione A' tra il profilo u (più ripido) e la retta a pendenza in modulo pari ad 1 (trovare A sarebbe stato di gran lunga più difficile). Adesso non ci resta che calcolare e confrontare le prestazioni che si ottengono considerando il profilo BPA' ed il profilo dritto BA', con l’intenzione di mostrare che quest’ultimo risulta più efficiente.
Vogliamo perciò verificare che valga la seguente disuguaglianza:

$$\int_{-\varepsilon}^{\frac{\varepsilon}{m-1}} \frac{r}{1+1}\,dr < \int_{-\varepsilon}^{0} r\,dr + \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{m-1}} \frac{r}{1+m^2}\,dr\,. \qquad (3)$$

Il calcolo dei due integrali, grazie all’approssimazione di A con A' risulta elementare, infatti otteniamo

$$\frac{1}{4}\left[\left(r+\frac{\varepsilon}{m-1}\right)^2 - \left(r-\varepsilon\right)^2\right] <$$
$$< \frac{1}{2}\left\{r^2 - \left(r-\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{1+m^2}\left[\left(r+\frac{\varepsilon}{m-1}\right)^2 - r^2\right]\right\}.$$

Svolgendo i calcoli e trascurando i termini di ordine superiore (con ε^2) che sono $o(\varepsilon)$, infinitesimi di ordine superiore, si otterrà infine:

$$\frac{2\,\varepsilon r}{m-1} + 2\,\varepsilon r < 4\,\varepsilon r + \frac{4\,\varepsilon r}{(1+m^2)(m-1)}\,.$$

Con le dovute semplificazioni questa disequazione risulta banale, infatti

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m-1} < 1 + \frac{2}{(1+m^2)(m-1)}\\
&(1+m^2) < (1+m^2)(m-1) + 2\\
&m + m^3 - 1 - m^2 + 2 - 1 - m^2 > 0\\
&(m-1)^2 > 0\,.
\end{aligned}$$

Si può giungere alla stessa conclusione, anche senza approssimare A con A' e maggiorando $-u'(r)$ con $m + \delta_\varepsilon$ in tutto il tratto PA. Anche in questo caso infatti si verificherebbe che la resistenza offerta dal tratto BA è minore. La maniera di procedere è analoga e si ottiene una disequazione che differisce dalla (3) nell’ultimo termine al secondo membro, che in questo caso sarà:

$$\int_0^{\overline{x}_\varepsilon} \frac{r}{1+(m+\delta)^2}\,dr < \int_0^{\overline{x}_\varepsilon} \frac{r}{1+u_r^2}\,dr\,,$$

dove abbiamo minorato l'integrando (infatti $m < -u_r(x) < m + \delta_\varepsilon$ per $x \in [0, \overline{x}_\varepsilon]$) e dove minoriamo anche l'intervallo d'integrazione considerando

$$r + \frac{\varepsilon}{m + \delta - 1} < \overline{x}_\varepsilon \, .$$

A questo punto, da calcoli analoghi ai precedenti, si giunge a verificare anche in questo caso la nuova disequazione.

3. Profili concavi non simmetrici

Nella seguente sezione sono riportate le dimostrazioni complete dei principali Teoremi enunciati nella Tesi [1] e di cui si era solo delineato uno schema di dimostrazione. Inoltre vengono richiamate le definizioni dei principali "strumenti" matematici di cui ci serviremo nelle dimostrazioni.

3.1. Spazi $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ e derivate deboli

Definizione 1. Spazio di Lebesgue
Lo spazio $L^p(\Omega)$, con $1 < p < +\infty$, è lo spazio delle funzioni $u(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili, tali che:

$$\int_\Omega \left|u(x)\right|^p dx < +\infty \, .$$

Si definisce *norma p-esima* o L^p-norma di u:

$$\left\|u\right\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty \, .$$

Leggermente differente è il caso in cui $p = +\infty$. Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili, per le quali:

$$\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \left|u(x)\right| < +\infty \, ,$$

ovvero tali che $\left\{\exists\, c \in \mathbb{R} : |u(x)| \le c \text{ q.o. in } \Omega\right\}$.
Definiamo L^∞-norma di u:

$$\left\|u\right\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \left|u(x)\right| < +\infty \, ,$$

dove anche qui il $\sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} \left|u(x)\right|$ è il minimo c tale che $|u(x)| \le c$ q.o. in Ω.

Definizione 2. Spazio di Sobolev
Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u(x)$ definite su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tali che $u \in L^p(\Omega)$ con *derivate parziali deboli* del primo ordine appartenenti ancora ad $L^p(\Omega)$. Ciò significa che, sia la funzione u che le sue *derivate parziali deboli* sono, elevate fino alla p-esima potenza, integrabili in Ω.

Notiamo che le derivate deboli, nel nostro caso particolare, sono due essendo il nostro dominio Ω una superficie del piano. La *derivata debole* è una generalizzazione della derivata convenzionale a funzioni u non necessariamente differenziabili, ma integrabili ($u \in L^1$). Ne riportiamo la definizione precisa.

Definizione 3. Derivata parziale debole
Data la funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ è detta i-esima derivata debole del primo ordine di u, e scriviamo $v_i := u_{x_i}$, se $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ funzione test, vale:

$$\iint_\Omega u \phi_{x_i} \, dx = - \iint_\Omega v_i \phi \, dx \, .$$

Allo stesso modo si definiscono le derivate deboli di ordine superiore. Notiamo che, se u è una funzione di classe C^1 allora la derivata classica e la derivata debole coincidono (come conseguenza dell'integrazione per parti).

3.2. Esistenza della soluzione in C_M

Teorema 1 (Esistenza della soluzione)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso. Allora esiste una funzione u minimizzante il funzionale $R(u)$ in C_M.

Dimostrazione. Dato che $R(u)$ è non negativo, ammette estremo inferiore in C_M. Sia $\{u_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante per $R(u)$ in C_M. Cosa si può dire a proposito della convergenza di questa successione?
In molti problemi variazionali *coercitivi* si può derivare una qualche convergenza dal fatto che le successioni minimizzanti sono limitate in qualche norma. Il nostro funzionale $R(u)$ sarebbe *coercitivo* se esistesse una costante positiva $C > 0$ tale che, in qualche norma (per adesso non

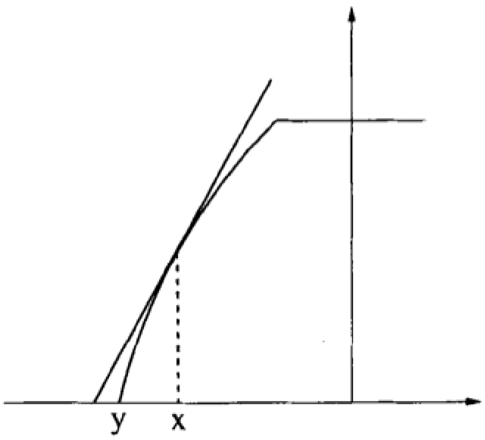

Figura 4: Generica sezione del profilo u.

specificata) nel generico spazio X considerato, fosse vero: $R(u) \geq C\|u\|_X^2 , \forall u \in X$. Purtroppo il funzionale che stiamo studiando non è coercitivo, infatti il minimizzante u cercherà di avere un gradiente elevato proprio per minimizzare l'integrando (e nella $\|u\|_X$ comparirà anche $\|\nabla u\|_X$). Mostreremo che la compattezza delle successioni minimizzanti deriva da un'opportuna scelta della classe di funzioni ammissibili. Nel nostro caso, saranno compatte nella topologia forte di $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, per ogni $p \in [1, \infty)$.
Innanzitutto osserviamo che, con riferimento alla Fig. 4, le funzioni in C_M hanno gradiente limitato:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{M}{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)} , \quad \text{q.o. in } \Omega . \tag{4}$$

Infatti in un certo punto x del profilo, la tangente attraverserà la $\partial\Omega$ ad una quota maggiore di zero. Vale allora, in ogni punto y della frontiera, la catena di disuguaglianze:

$$0 \leq u(y) \leq u(x) + (y - x)u'(x) \leq M - |y - x||u'(x)| .$$

In Fig. 4 si vede che $(y - x)u'(x) \leq 0$. Si ottiene allora che $|u'(x)| \leq M/|y - x|$, ovvero la (4). Questo ci permette di dire che qualsiasi successione u_k in C_M è *localmente* uniformemente Lipschitziana, cioè per ogni insieme compatto $\omega \subset\subset \Omega$ è uniformemente Lipschitziana in ω. Perciò grazie al Teorema di Ascoli-Arzela (di cui più avanti riportiamo l'enunciato) è possibile estrarre una sottosuccessione (che indichiamo ancora con u_k) *uniformemente convergente* ad u. Questo mostra che C_M è compatto in $L^\infty_{loc}(\Omega)$ (tuttavia quest'affermazione va meglio chiarita, pertanto verrà dimostrata nel paragrafo successivo).
Adesso vogliamo vedere se:

$$\nabla u_k(x) \to \nabla u(x) , \quad \text{q.o. in } \Omega . \tag{5}$$

Sia x un punto in cui tutte le u_k e la u siano differenziabili, che è vero q.o. in Ω. Grazie alla concavità della funzione di una sola variabile $t \mapsto u(x + te_i)$ (con e_i i-esimo versore di $\mathbb{R}^N$ per i=1,2,...,N) la derivata di questa funzione può, in un punto x, essere limitata superiormente ed inferiormente dal rapporto incrementale della funzione tra il punto x e un altro punto nell'intorno di questo (rispettivamente sinistro e destro):

$$\frac{u_k(x + \varepsilon e_i) - u_k(x)}{\varepsilon} \leq \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) \leq \frac{u_k(x) - u_k(x - \varepsilon e_i)}{\varepsilon} ,$$

che vale q.o. $\forall x \in \Omega , \forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall i = 1, 2, \ldots , N$. Adesso, passando al limite per $k \to \infty$ (visto che $\{u_k\} \to u$)

$$\begin{aligned} \frac{u(x + \varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon} &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) \leq \frac{u(x) - u(x - \varepsilon e_i)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

e in quest'ultima, facendo tendere a zero la ε, si scrive che

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) \leq \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) ,$$

che si riduce a una catena di uguaglianze, provando la (5). Più avanti si da una definizione di *limite superiore* e *inferiore*. Da quest'ultimo risultato possiamo finalmente dimostrare, invocando il *Teorema della convergenza dominata di Lebesgue*, l'esistenza della funzione $u \in C_M$ che minimizza il funzionale $R(u)$. Tale teorema afferma che se:

1. $\{f_n\} , f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ dove $\{f_n\} \to f$ q.o. in Ω
2. tale che $|f_n(x)| \leq g(x) , \forall x \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$,
3. con $g(x) \in L^1(\Omega)$, ovvero $\int_\Omega g(x)\, dx < +\infty$

allora si ha che:

$$\int_{\Omega} f_n \, dx \to \int_{\Omega} f \, dx \, .$$

Nel nostro caso in particolare abbiamo

$$\frac{1}{1+|\nabla u_k|^2} \to \frac{1}{1+|\nabla u|^2} \, , \quad \text{per } k \to \infty$$

$$\left| \frac{1}{1+|\nabla u_k|^2} \right| \leq 1 = g(x) \, , \text{ e ovviamente } g(x) \in L^1(\Omega) \, ,$$

pertanto segue la tesi:

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{1+|\nabla u_k|^2} \, dx \to \iint_{\Omega} \frac{1}{1+|\nabla u|^2} \, dx \, . \qquad \square$$

Definizione 4 (Limite inferiore e Limite superiore)**.**
Data la successione $\{a_n\}$ di numeri reali si definiscono limite superiore e inferiore , rispettivamente:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\geq k} a_n \right) \, ,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\geq k} a_n \right) .$$

Dopodiché si possono enunciare i seguenti risultati:

1. $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ esistono sempre in $[-\infty, +\infty]$,
2. $\limsup a_n \geq \liminf a_n$,
3. $\exists \lim a_n \iff \limsup a_n = \liminf a_n$.

Enunciamo adesso il suddetto Teorema, senza riportarne la dimostrazione.

Teorema (di Ascoli-Arzelà)**.**
Sia $\{u_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni a valori in $\mathbb{R}$, e sia $\omega \subset\subset \Omega$.
Se gli elementi di tale successione verificano che:

1. *$u_k(x)$ è continua in ω*
2. *$u_k(x)$ è limitata in ω*
3. *$u_k(x)$ è uniformemente Lipschitziana in ω.*

Allora questa, a meno di una sottosuccessione, convergerà uniformemente a:

$$u_k(x) \to u(x) \, , \quad \text{per } k \to \infty$$

ovvero

$$\big\| u_k - u \big\|_{L^\infty(\omega)} = \sup_{x\in\omega} \big| u_k(x) - u(x) \big| \to 0 \, .$$

Queste ultime due relazioni sono infatti (in questo caso) equivalenti, dato che:

Definizione 5 (Convergenza uniforme)**.**
Data una successione di funzioni $\{f_k(x)\}$ a valori in $\mathbb{R}$, definita sull'intervallo (a,b), si dice che la successione converge uniformemente e si scrive:

$$f_k(x) \to f(x) \qquad \text{uniformemente in } (a,b)$$

se si ha che

$$\sup_{x\in(a,b)} \big| f_k(x) - f(x) \big| \to 0 \, , \quad \text{per } k \to \infty \, .$$

Definizione 6 (Convergenza in L^∞)**.**
Data una successione di funzioni $\{f_k(x)\}$ a valori in $\mathbb{R}$, definita sull'intervallo (a,b), si dice che la successione converge rispetto alla norma di L^∞ e si scrive:

$$f_k(x) \to f(x) \qquad \text{in } L^\infty(a,b)$$

se si ha che

$$\big\| f_k - f \big\|_{L^\infty(a,b)} = \sup_{x\in(a,b)} \operatorname{ess} \big| f_k(x) - f(x) \big| \to 0 \, , \quad \text{per } k \to \infty \, ,$$

dove l'estremo superiore essenziale (che compare nell'ultima formula) è l'estremo superiore nell'intervallo (a,b) a meno di un insieme di misura nulla.
Se come nel nostro caso la funzione è continua, si ha che: $\sup \operatorname{ess} f(x) \equiv \sup f(x)$, ovvero quest'ultimo coincide con l'usuale estremo superiore, lo stesso che compare nella definizione (Def. 5) di convergenza uniforme. Per questo si può concludere che, in questo caso, la convergenza uniforme e la convergenza in L^∞ sono la stessa cosa.
Per completezza, ricordiamo infine di seguito, la definizione di convergenza puntuale di una successione.

Definizione 7 (Convergenza puntuale)**.**
Data una successione di funzioni $\{f_k(x)\}$ a valori in $\mathbb{R}$, definita sull'intervallo (a,b), si dice che la successione converge puntualmente e si scrive:

$$f_k(x) \to f(x) \qquad \text{puntualmente in } (a,b)$$

se si ha che

$$\forall x \in (a,b) \quad f_k(x) \to f(x)\,, \qquad \text{per } k \to \infty\,.$$

La convergenza puntuale è meno forte rispetto alla convergenza uniforme, nel senso che quest'ultima implica necessariamente la convergenza puntuale, mentre non è sempre vero il viceversa.

3.3. Compattezza di C_M in $L^\infty_{loc}(\Omega)$

L'affermazione che C_M sia compatto in $L^\infty_{loc}(\Omega)$, è una questione molto più delicata di quanto possa sembrare. Si vuole provare il seguente Teorema.

Teorema (Compattezza di C_M in $L^\infty_{loc}(\Omega)$)**.**
Data una successione di funzioni $\{u_k(x)\}$ in C_M, $\exists u \in C_M$ ed una sottosuccessione $\{u_{k_n}(x)\}$ tali che

$$u_{k_n}(x) \to u(x) \qquad \textit{uniformemente in } \omega,\ \forall \omega \subset\subset \Omega\,,$$

allora si ha che:

$$u_{k_n}(x) \to u(x) \qquad \textit{in } L^\infty(\omega),\ \forall \omega \subset\subset \Omega\,.$$

Perciò fissato un certo $\omega \subset\subset \Omega$, posso trovare una sottosuccessione u_{k_n} tale che $u_{k_n} \to u$ in $L^\infty(\omega)$.
Il problema è che se prendo in considerazione un altro ω, potrebbe cambiare la sottosuccessione ed anche il limite u. Per fortuna questo non avviene, vediamo perché.

Dimostrazione. Prendiamo una successione $\{\omega_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tale che: $\omega_n \subset\subset \Omega$, $\omega_n\uparrow$ (ovvero $\omega_n \subset \omega_{n+1}$) e $\bigcup\limits_n \omega_n = \Omega$. Per esempio, una successione di questo tipo potrebbe essere (vedi Fig. 5):

$$\omega_n := \left\{ x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}.$$

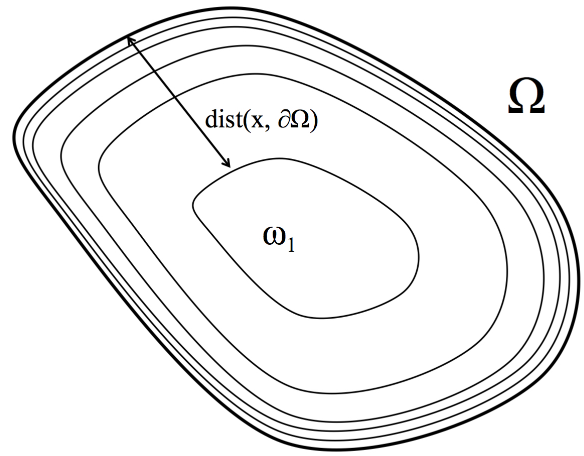

Figura 5: Succesione ω_n.

A questo punto fissato ω_1, troverò una u (definita per ora solamente su ω_1) e una sottosuccessione $u_k^{(1)}$ tale che

$$u_k^{(1)} \to u\,, \qquad \text{in } L^\infty(\omega_1)\,.$$

Se adesso considero l'elemento successivo ω_2 e continuo a lavorare su $u_k^{(1)}$, posso estrarne un'ulteriore sottosucessione $u_k^{(2)}$ tale che

$$u_k^{(2)} \to \tilde{u}\,, \qquad \text{in } L^\infty(\omega_2)\,.$$

Osserviamo che: $\tilde{u}(x) \equiv u(x)$, $\forall x \in \omega_1$. Da adesso procediamo così fino al passo n-esimo, cioè fino a costruire una sottosuccessione $\{u_k^{(n)}\}$ tale che

$$u_k^{(n)}(x) \to u(x)$$

dove la $u_k^{(n)}$ è stata estratta dalla precedente $u_k^{(n-1)}$. Per questo il nuovo limite $u(x)$ coinciderà sempre con il precedente in ω_{n-1}. In questa maniera ho finalmente trovato un unico limite $u(x)$ definito in tutto Ω.
Mi resta da determinare un'unica sottosuccessione che tenda poi a questo limite, ovvero una

$$\tilde{u}_k : \tilde{u}_k \to u \qquad \text{in } L^\infty(\omega_n),\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Costruisco allora la sottosuccessione mediante un procedimento detto di *diagonalizzazione*, ovvero:

$$\tilde{u}_k := u_k^{(k)}\,. \tag{6}$$

Tale nome deriva dal fatto che se immaginiamo di listare le varie sottosuccessioni $u_k^{(n)}(x)$, nelle n righe e k colonne di una matrice di "dimensioni" infinite, in questa maniera:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & \dots & u_k^{(1)} & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(k)} & u_2^{(k)} & u_3^{(k)} & \vdots & u_k^{(k)} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & u_3^{(n)} & \vdots & u_k^{(n)} & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

costruire la sottosuccessione (6), equivale proprio ad estrarre la diagonale di tale "matrice".
Fissato n, gli elementi $u_k^{(k)}$, con $k \geq n$, sono tutti elementi estratti dalla sottosuccessione $u_k^{(n)}$ e perciò:

$$\tilde{u}_k = u_k^{(k)} \to u \quad \text{in } L^\infty(\omega_n)\,. \tag{7}$$

Se ω è un generico aperto tale che $\omega \subset\subset \Omega$, allora per un qualche n si avrà $\omega \subset \omega_n$.
Questo, insieme alla (7), ci porta a concludere che al limite per $n \to \infty$ si avrà anche

$$\tilde{u}_k \to u \quad \text{in } L^\infty(\omega)\,.$$

Osservazione 1. Volendo essere più precisi, si dovrebbe ancora dimostrare che data la sottosuccessione $\tilde{u}_k$ in C_M, si avrà che anche il suo limite u vi appartiene, ovvero:

$$\tilde{u}_k \in C_M \implies u \in C_M\,.$$

Questo è molto facile da vedere, infatti se $\tilde{u}_k \in C_M$ allora vale:

$$\tilde{u}_k\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda \tilde{u}_k(x) + (1-\lambda)\tilde{u}_k(y)\,,$$

ma se portiamo al limite la k (ovvero per $k \to \infty$):

$$u\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)\,. \quad \square$$

3.4. Varie proprietà della soluzione in C_M

Teorema 2 (Non unicità della soluzione)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso. Allora la funzione u minimizzante è in generale non unica, perché se $\Omega = B_R$ (cerchio di raggio R) la soluzione u è non radiale.

Dimostrazione. Si possono mostrare diverse prove della non simmetria del profilo ottimo. Una consiste nel verificare che esiste una funzione non radiale $u_G \in C_M$ tale che $R(u_G) < R(u_N)$ e perciò che il minimo di Newton u_N, trovato nella classe delle funzioni radiali in C_M, non è più il minimo nella più ampia classe delle funzioni concave. Questa funzione u_G che assomiglia alla punta di un cacciavite, è stata scoperta da P. Guasoni [4] e mostreremo più avanti com'è stata costruita.
Altrimenti si può verificare direttamente che, su un dominio circolare B_R, la funzione u_N (profilo ottimo di Newton a simmetria radiale) non è più un minimo nella più ampia classe C_M, in quanto non verifica una delle condizioni necessarie richieste al minimo. Infatti basta mostrare che il segno della *variazione seconda* di $R(u)$, calcolata in u_N, può risultare negativo per particolari variazioni ϕ non radiali. Che la variazione seconda risulti positiva nel punto di minimo è una condizione necessaria affinché questo sia effettivamente il minimo del funzionale $R(u)$, in maniera del tutto simile a quanto richiesto alla matrice Hessiana di funzioni in più variabili (scalari) $f(x)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Consideriamo una funzione test $\phi \in C^\infty(B_R)$ tale che per ogni ε preso in un intorno sufficientemente piccolo di zero la funzione $u_N + \varepsilon\phi$ è ancora un elemento di C_M. Se u_N è un minimo assoluto di $R(u)$ in C_M, allora $R(u_N + \varepsilon\phi)$ può essere vista come una funzione di ε con un minimo locale in $\varepsilon = 0$. Di conseguenza si dovrà avere che la *variazione prima* $\delta R(u_N, \phi)$ nella direzione della funzione test sarà uguale a zero

$$\delta R = -2 \iint_{B_R} \frac{\nabla u_N \cdot \nabla \phi}{(1 + |\nabla u_N|^2)^2}\, dx = 0\,, \tag{8}$$

e la *variazione seconda* $\delta^2 R(u_N,\phi)$ non negativa, cioè:

$$\delta^2 R = \iint_{B_R} \frac{2[-(1+|\nabla u_N|^2)|\nabla\phi|^2 + 4(\nabla u_N\cdot\nabla\phi)^2]}{(1+|\nabla u_N|^2)^3}\, dx \geq 0\,. \tag{9}$$

I passaggi necessari per ricavarle, per non interrompere il filo del ragionamento, sono riportati alla fine della dimostrazione. Si vuole adesso rendere la (9) falsa, per concludere che u_N non è il minimo di $R(u)$ in C_M. Notiamo che se consideriamo funzioni test ϕ radiali la (9) è ovviamente vera. Si ha infatti $(\nabla u_N\cdot\nabla\phi)^2 = |\nabla u_N|^2|\nabla\phi|^2 = u_r^2\,\phi_r^2$ e pertanto (solamente nel caso radiale) la parentesi quadra in (9) si riduce a $(3u_r^2-1)\phi_r^2$. Quest'ultimo è positivo perché qualsiasi ϕ : $u_N+\varepsilon\phi\in C_M$ dovrà per forza avere il suo *supporto* al di fuori della parte piatta di u_N, ovvero nella regione in cui $|\nabla u_N|\geq 1$ (vedi Thm. 3 in [1]) e questo dimostra l'ottimalità (già nota) della u_N nella classe delle funzioni radiali in C_M. Se si vuole rendere falsa la (9) bisogna innanzitutto scegliere una funzione test ϕ non radiale e fare in modo soprattutto che l'angolo tra i vettori ∇u_N e $\nabla\phi$ sia quanto più vicino possibile ad un angolo retto. Così il prodotto scalare $(\nabla u_N\cdot\nabla\phi)^2$ tenderà a zero permettendo al termine negativo in parentesi quadra di vincere su quello positivo. Allora consideriamo una funzione test del tipo $\phi(r,\theta)=\eta(r)\sin(k\theta)$, con $\eta(r)$ a supporto in (r_0,R). Scegliendo adesso un k opportunamente grande, purché $u_N+\phi(r,\theta)\in C_M$, si può vedere che la *variazione seconda* (9) diventa negativa. Perciò la soluzione radiale di Newton u_N può essere infinitesimamente perturbata in una funzione non radiale con minor resistenza: quindi non è un minimo in C_M. □

Come si è detto sopra, il modo di procedere è analogo al caso di funzioni di più variabili $f(x)\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$. Essendo queste delle condizioni necessarie, basta che una di queste venga violata per poter concludere che non ci si trova in un punto di minimo del funzionale.

Per esempio sia data la funzione $f(x)\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ di cui si cerca il $\min f$ per $x\in\mathbb{R}^N$.

$$\text{se } \bar{x} \text{ minimizza } f \implies \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t} = 0$$

che vuol dire che la derivata direzionale calcolata nel punto $\overline{x}$, dev'essere nulla in qualsiasi direzione v. Trovandoci in uno spazio di dimensione finita N, questa condizione necessaria si traduce in N condizioni linearmente indipendenti:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)=0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0\,,\quad \forall i=1,\dots,N\,.$$

Allo stesso modo, per il funzionale $R(u)\colon C_M(\Omega)\to\mathbb{R}$:

$$\bar{u} \text{ minimizza } R(u) \implies \frac{\partial R}{\partial\phi}(\bar{u}) = \lim_{t\to 0}\frac{R(\bar{u}+t\phi)-R(\bar{u})}{t} = 0\,,$$

dove ϕ è la solita funzione test, e quella calcolata è la derivata di Fréchet. Queste condizioni del primo ordine, ci garantiscono la stazionarietà del punto.
Le condizioni del secondo ordine, invece, riguardano le derivate seconde della funzione. Affinché $\bar{x}$ sia il minimo di f è necessario che $D^2 f(\bar{x})$, la matrice Hessiana di f, sia in quel punto semi-definita positiva:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\geq 0\,,\quad \forall i=1,\dots,N\,.$$

Intuitivamente quest'ultima condizione equivale a richiedere che le sezioni di f lungo piani perpendicolari agli assi coordinati x_i risultino concave. Ovviamente se questa condizione è violata, ci porta a concludere che non si tratti di un punto di minimo, ma per esempio di un punto di sella o di massimo.

Adesso vogliamo ricavare le (8) e (9). Dobbiamo calcolare la derivata di Fréchet del nostro funzionale. Calcoliamo pertanto il limite del rapporto incrementale nella direzione di una funzione test ϕ e otteniamo così la variazione prima:

$$
\begin{aligned}
&\delta R(u,\phi) = \lim_{t\to 0} \frac{R(u+t\phi)-R(u)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\int_{B_R} \frac{dx}{1+|\nabla(u+t\phi)|^2} - \int_{B_R} \frac{dx}{1+|\nabla u|^2}\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{B_R} \frac{1}{t}\left[\frac{dx}{1+|\nabla u|^2+t^2|\nabla\phi)|^2+2t\,\nabla u\cdot\nabla\phi} - \frac{dx}{1+|\nabla u|^2}\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{B_R} \frac{1}{t}\,\frac{1+|\nabla u|^2-1-|\nabla u|^2-t^2|\nabla\phi|^2-2t\,\nabla u\cdot\nabla\phi}{\left[1+|\nabla u|^2+t^2|\nabla\phi|^2+2t\,\nabla u\cdot\nabla\phi\right]\left(1+|\nabla u|^2\right)} dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{B_R} \frac{-t|\nabla\phi|^2-2\,\nabla u\cdot\nabla\phi}{\left[1+|\nabla u|^2+t^2|\nabla\phi|^2+2t\,\nabla u\cdot\nabla\phi\right]\left(1+|\nabla u|^2\right)}\, dx \\
&= -2\int_{B_R} \frac{\nabla u\cdot\nabla\phi}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^2}\, dx = 0\,,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sottinteso che si potesse portare sotto il segno d'integrale il passaggio al limite, cosa vera nel nostro caso in cui entrambe le funzioni con cui lavoriamo (u e ϕ) sono regolari.
Per ottenere la variazione seconda calcoliamo adesso una seconda volta la di derivata di Fréchet, utilizzando stavolta la definizione come limite del rapporto incrementale:

$$
\begin{aligned}
&\delta^2 R(u,\phi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\delta R(u+t\phi)\Big)\Big|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2\int_{B_R} \frac{\nabla(u+t\phi)\cdot\nabla\phi}{\left(1+\left|\nabla(u+t\phi)\right|^2\right)^2}\, dx\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= -2\int_{B_R}\left\{\frac{\left|\nabla\phi\right|^2}{\left(1+\left|\nabla(u+t\phi)\right|^2\right)^2} - \Big[\nabla\big(u+t\phi\big)\cdot\nabla\phi\Big]\right. \\
&\left.\left[\frac{2\left(1+\left|\nabla(u+t\phi)\right|^2\right)\left(2\nabla u\cdot\nabla\phi+2t\left|\nabla\phi\right|^2\right)}{\left(1+\left|\nabla(u+t\phi)\right|^2\right)^4}\right]\right\}_{t=0} dx \\
&= -2\int_{B_R} \frac{\left|\nabla\phi\right|^2\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)-4\left(\nabla u\cdot\nabla\phi\right)^2}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^3}\, dx\,,
\end{aligned}
$$

anche qui, al secondo passaggio, abbiamo spostato la derivata sotto il segno d'integrale, per i motivi precedenti.

Anche nel caso di funzioni non a simmetria radiale si può ricavare, integrando per parti la variazione prima (8), l'equazione di Eulero-Lagrange associata. In più

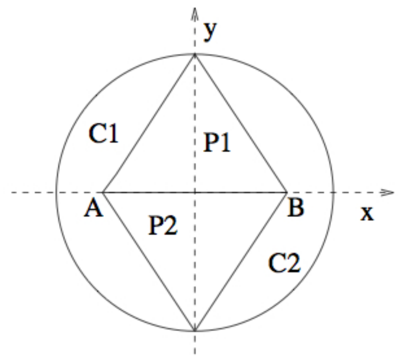

Figura 6: Vista dall'alto del profilo u_G di Fig. **??**.

dimensioni la formula di integrazione per parti è:

$$
\begin{aligned}
&\iint_\Omega \frac{\nabla u\cdot\nabla\phi}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^2}\, dx = \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\nabla u}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^2}\,\phi\, dx - \iint_\Omega \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^2}\right)\phi\, dx = 0,
\end{aligned}
$$

essendo nel nostro caso ϕ a supporto compatto, l'integrale sulla frontiera di Ω risulta essere identicamente nullo. Pertanto la nostra equazione di Eulero-Lagrange è:

$$
\iint_\Omega \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^2}\right)\phi\, dx = 0\,, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\,.
$$

Dovendo valere per ogni funzione test ϕ, possiamo scrivere

$$
\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\left(1+\left|\nabla u\right|^2\right)^2}\right) = 0\,.
$$

Abbiamo menzionato prima la funzione “cacciavite” u_G trovata da P. Guasoni, come prova della non simmetria del profilo ottimo in C_M. Questa funzione viene definita nella seguente maniera: per ogni $a, M > 0$ indichiamo con $V_{a,M}\colon B_R \to \mathbb{R}$, dove $B_R \subset \mathbb{R}^2$, la funzione il cui sottografico coincide con l'inviluppo di tutti i coni di base uguale al cerchio B_R e di vertici appartenenti al segmento di estremi $A = (-a, 0, M)$ e $B = (a, 0, M)$. In Fig. 6 è possibile vedere come questa funzione venga costruita. Altrimenti si può anche definire come l'intersezione del semispazio

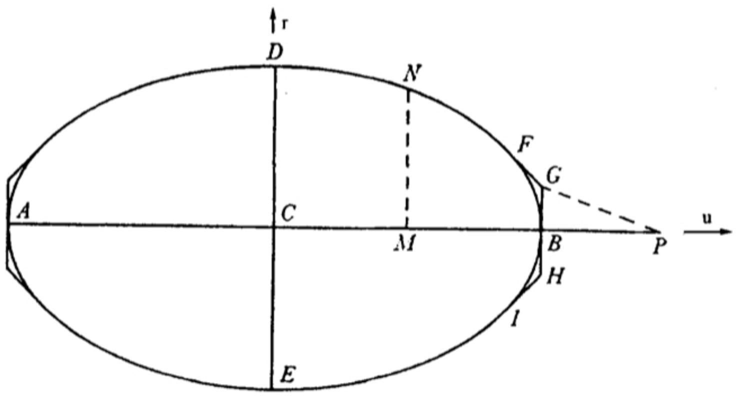

Figura 7: Disegno di Newton, si veda: [5, pag. 462].

$\{z : z \geq 0\}$ e di tutti i semispazi contenenti il segmento $\overline{AB}$ e ∂B_R, ovvero in forma cartesiana:

$$V_{a,M} := \begin{cases} M - \frac{M}{R}|y| & \text{se } x \in P_1 \vee P_2 \ , \\ C_A(x) & \text{se } x \in C_1 \ , \\ C_B(x) & \text{se } x \in C_2 \end{cases}$$

dove $C_A(x)$ e $C_B(x)$ indicano le funzioni coniche di base B_R e di vertice rispettivamente A e B. Per ogni M esisterà un a ottimale in $[0, R]$ che ci darà quindi la funzione cacciavite ottimale V_M. Il funzionale calcolato su V_M sarà:

$$R(V_M) = \iint_{P_1 \cup P_2} \frac{1}{1 + (\frac{M}{R})^2} + 2 \iint_{C_1} \frac{1}{1 + |\nabla C_A(x)|^2} \ ,$$

dove abbiamo accorpato sotto un unico integrale i contributi di C_1 e C_2, essendo il loro valore uguale. Dal valore di quest'ultimo si vedrà che la forma a "cacciavite" è preferibile a quella radiale.

Concludiamo con la dimostrazione dell'ultimo Teorema riguardante la soluzione ottimale u nella classe C_M, delle funzioni concave non a simmetria radiale.

Teorema 3.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso, e la funzione u un minimizzante del funzionale $R(u)$. Allora $|\nabla u| \notin (0, 1)$ q.o. in Ω.

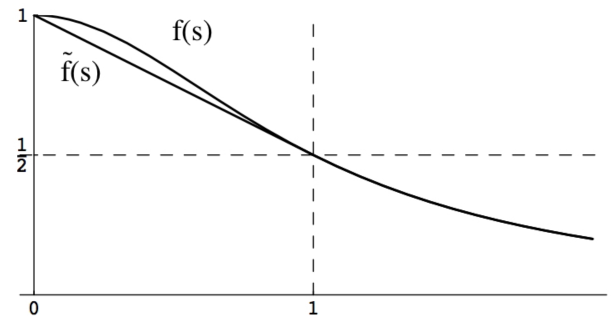

Figura 8: $f(s)$ ed il suo inviluppo convesso $\tilde{f}(s)$.

Dimostrazione. Si procede per assurdo e si mostrando come u non possa essere un minimizzante qualora esista un insieme $N \subset \Omega$ di misura positiva in cui $|\nabla u(x)| \in (0, 1)$. Consideriamo quindi un profilo $w \in C_M$ che si mantiene sempre sopra u e la cui pendenza non appartiene mai all'intervallo $(0, 1)$. Rifacendosi all'idea di Newton, riportata in Fig. 7, questa funzione $w(x)$ è definita nella seguente maniera:

$$w(x) := \inf \Big\{ t(x) : t(x) \text{ piani tangenti ad } u \text{ e } |\nabla t| \notin (0, 1) \Big\} ,$$

che sarebbe in Fig. 7 il tratto $FGHI$. Per la concavità dei profili la u e la w si toccano solamente nei punti in cui $|\nabla u| = 0$ e $|\nabla u| \geq 1$. Adesso, se vogliamo capire perché si ha che $R(w) < R(u)$, risulta conveniente "rilassare" $R(u)$ definendo: $\tilde{R}(u) := \int_\Omega \tilde{f}(|\nabla u|)\, dx$ e sostituendo la mappa $f(s) = 1/(1 + s^2)$ con qualcosa di più convesso, cioè $\tilde{f}(s)$. La funzione convessa più estesa che si mantenga al di sotto di f in tutto $\mathbb{R}$ è la funzione identicamente nulla. Tuttavia questa funzione non è adatta al nostro scopo. Dato che è pari, immaginiamo allora $f(s)$ come una funzione definita in $[0, +\infty)$ e sostituiamola con il suo *inviluppo convesso*:

$$\tilde{f}(s) := \begin{cases} 1 - s/2 & \text{se } s \in [0, 1] \\ 1/(1 + s^2) & \text{se } s \in [1, \infty) \end{cases} ,$$

dove nell'intervallo $[0, 1]$ abbiamo sostituito alla parte concava di $f(s)$ la retta passante per il suo punto di flesso s_0 ed il punto di intersezione con l'asse delle ordinate (vedi Fig. 8). Si noti che $\tilde{f}(s)$ è ancora di classe C^∞ nel suo dominio. Ovviamente si avrà che $\tilde{f}(s) < f(s)$ solamente in

$(0,1)$, cosicché $\tilde{R}(w) = R(w)$ per costruzione di w, mentre $\tilde{R}(u) < R(u)$ avendo assunto che N è un insieme di misura non nulla. Se riusciremo a mostrare che:

$$\tilde{R}(w) \leq \tilde{R}(u)\,, \tag{10}$$

allora avremo concluso con la nostra dimostrazione.
Portiamo tutto al secondo membro e moltiplichiamo per 2,

$$\begin{aligned}
2\tilde{R}(u) - 2\tilde{R}(w) &= 2\int_{\Omega}\left[\tilde{f}(\nabla u) - \tilde{f}(\nabla w)\right]dx \\
&= 2\int_{\{u\neq w\}}\left[\tilde{f}(\nabla u) - \tilde{f}(\nabla w)\right]dx \\
&= 2\int_{\{u\neq w\}}\left(1 - \frac{|\nabla u|}{2} - 1 + \frac{|\nabla w|}{2}\right)dx \\
&= \int_{\{u\neq w\}}\Big(|\nabla w| - |\nabla u|\Big)\,dx\,,
\end{aligned}$$

dove si è ristretto il dominio d'integrazione da Ω al solo insieme $\{u \neq w\}$ dato che solo li l'integrando è diverso da zero (poiché al di fuori dell'intervallo $(0,1)$ i due profili, u e w, coincidono), ed in tale intervallo la mappa da considerare è: $\tilde{f}(s) = 1 - s/2$.
Ora però ci conviene estendere nuovo il dominio d'integrazione a tutto Ω così da poter utilizzare la *formula della coarea*. Questa ci dice che, data una funzione $v\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ lipschitziana e un insieme Ω misurabile, si ha:

$$\int_{\Omega}|\nabla v|\,dx = \int_{\mathbb{R}}\mathcal{H}^{N-1}(\Omega\cap\{v=t\})\,dt\,.$$

Il secondo membro altro non è che un integrale degli insiemi di livello della funzione v. Nel nostro caso quindi ci permette di scrivere che:

$$\int_{\Omega}\Big(|\nabla w| - |\nabla u|\Big)dx = \int_0^M\Big[\mathcal{H}^{N-1}\big(\{w=t\}\big) - \mathcal{H}^{N-1}\big(\{u=t\}\big)\Big]dt.$$

L'integrando di quest'ultima formula è certamente non negativo, infatti $\forall t \in (0,M)$ gli insiemi di livello di u sono sottoinsiemi convessi degli insiemi di livello della w (dato che la w giace sempre al di sopra della u, per costruzione). Inoltre proprio perché sottoinsiemi convessi, la *misura di Hausdorff* $(N-1)$*-dimensionale* della loro frontiera sarà certamente minore (basti pensare al caso $N=2$ per poterselo figurare). Pertanto quest'ultimo integrale risulterà positivo implicando la validità della (10). $\square$

Bibliografia

[1] A. Gallegati. Il problema di newton di minima resistenza. Tesi di Laurea Triennale http://www.mat.uniroma1.it/people/dallaglio/gallegati/, 2014.

[2] Bernd Kawohl. Some nonconvex shape optimization problems. In *Optimal shape design*, volume 1740 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 7–46. Springer Berlin Heidelberg, June 1998.

[3] A. Miele. *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. Academic Press, New York, 1965.

[4] P. Guasoni. Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi. tesi di laurea. Master's thesis, Università degli Studi di Pisa, 1996.

[5] D.T. Whiteside. *The Mathematical Papers of ISAAC NEWTON*, volume VI. Cambridge Univ. Press, London, 1974.