FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Elaborato finale per il conseguimento
della Laurea in Ingegneria aerospaziale

# Il problema di Newton di minima resistenza

*Candidato: Andrea Gallegati*
*Matricola: 1468208*

*Relatore: prof. Andrea Dall'Aglio*
*SSD: Analisi Matematica*

**Abstract.** Il problema di ottimizzare la forma di un profilo immerso in una corrente uniforme, per minimizzarne la resistenza aerodinamica, può considerarsi come uno dei primi problemi di *Calcolo delle Variazioni*. Lo stesso Newton nel 1685 descrisse un modello fisico per il flusso di un fluido non viscoso intorno al corpo, diede una formulazione del problema di minimo, e riuscì a risolverlo nel caso particolare di domini a simmetria radiale. In caso di volo *ipersonico* la teoria di Newton può fornire in prima approssimazione dei risultati in accordo con la realtà sperimentale. Esporremo i risultati ottenuti da Newton nel caso di profili convessi a simmetria radiale, per dimostrare poi che nella più ampia classe dei profili convessi questa sua soluzione non è più quella ottimale: il profilo ottimo (tuttora non noto) *sembra* essere a forma di "cacciavite".

## 1. Il modello fisico di Newton

Nel 1685 Newton formulò e risolse il problema di ottimizzare[*] la forma di un solido di rotazione che si muove in un fluido non viscoso nella direzione parallela al suo asse, in modo tale da minimizzare la resistenza all'avanzamento. Ovviamente la soluzione dipende da come viene definita la resistenza del mezzo.

Newton si basò su un modello fisico molto semplice e perciò approssimativo, in cui le particelle di fluido viaggiano in direzione esclusivamente rettilinea non interagendo tra di loro e urtano elasticamente contro gli ostacoli, scomparendo successivamente all'infinito.

Sotto queste ipotesi la resistenza al moto del nostro corpo sarà dovuta unicamente alla componente normale della quantità di moto ceduta dalle particelle di fluido durante gli urti elastici cui il nostro corpo è sottoposto in ogni istante. Ovviamente di questa quantità di moto normale sarà solo la componente lungo la direzione del moto quella che andrà a frenare il corpo. Così andando a proiettare la quantità di moto, una prima volta per estrarne la componente nor-

[*] Per mantenere questo elaborato entro la lunghezza massima fissata, molte dimostrazioni sono state spostate in un'Appendice, che è disponibile all'indirizzo http://www.mat.uniroma1.it/people/dallaglio/gallegati/ . Nel testo faremo spesso riferimento a quest'Appendice, indicata nella bibliografia con [1].

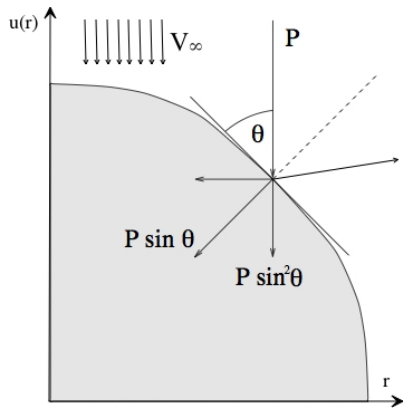


Figura 1: La legge del seno al quadrato di Newton.

male scambiata e una seconda per ottenere da questa la componente in direzione del moto (vedi Fig. 1), si perviene alla cosiddetta *Newton's sine-squared pressure law* dove il contributo elementare della resistenza esercitata in quel punto è proporzionale al $\sin^2\theta$ (dove indichiamo con $\theta$ l'angolo che in ogni punto la direzione del flusso forma con la tangente al profilo).

Nelle sue osservazioni Newton ci dice che trovò che la resistenza cui era sottoposta una sfera immersa nella corrente, era pari alla metà della resistenza che offriva la stessa, a un cilindro di pari raggio, dando in qualche modo una definizione primitiva del "*drag coefficient*" che perciò per la sfera valeva $C_D = 0,5$. Così è definito (in ambito automobilistico) il *coefficiente di penetrazione aerodinamica*, che rappresenta ovviamente solo uno dei vari termini di resistenza all'avanzamento. Partendo però dall'ipotesi di validità di tali condizioni sarà possibile, in alcuni casi, ottenere una soluzione analitica del problema.

Al fine della modellizzazione matematica, supponiamo che il "proiettile" sia a simmetria cilindrica e descritto da un profilo radiale $u = u(r)$, con $0 \leq r \leq R$. Immaginiamo che il proiettile si muova verso l'alto o equivalentemente che il fluido si muova verso il basso. Nell'ipotesi in cui ogni particella urti una sola volta il corpo si ottiene che la resistenza totale è espressa dal funzionale:

$$R(u) = \iint_{B_R} \frac{1}{1+u_r^2}\,dx = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1+u_r^2}\,dr\,, \qquad (1)$$

dove $u_r$ è la derivata di $u$ rispetto ad $r$. Per arrivare ad (1) basta notare che la pendenza del profilo è così legata all'angolo d'incidenza $\theta$:

$$u_r = \cot\theta\,, \quad \text{da cui} \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{1+\cot^2\theta} = \frac{1}{1+u_r^2}$$

Volendo generalizzare il problema ad un profilo non necessariamente a simmetria radiale, che sarà perciò descritto da una funzione $u(x,y)$ di due variabili, il funzionale (1) si scriverà allora:

$$R(u) = \iint_\Omega \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\,dx\,. \qquad (2)$$

Ovviamente questa volta non siamo vincolati a prendere un dominio $\Omega$ di forma circolare.

Intendiamo minimizzare la resistenza $R(u)$ all'interno della classe di funzioni $u$ ammissibili. Vedremo che la scelta della classe di funzioni ammissibili è di fondamentale importanza.

## 2. Applicabilità della legge di Newton

È chiaro che il modello ipotizzato da Newton non tiene conto di tutti i fenomeni fisici che in realtà contribuirebbero alla resistenza totale esercitata dal mezzo (resistenza d'attrito, di forma, d'onda, etc..), ma resta tuttavia sorprendente che nonostante i presupposti molto approssimativi Newton sia riuscito ad ottenere una legge che oggi, in caso di *volo ipersonico*, è in grado di prevedere con buona approssimazione la distribuzione del $C_p$ sul corpo.

È più facile vedere questo se, come in [2], ricaviamo (1) come integrale di superficie piuttosto che direttamente come integrale doppio.

Consideriamo allora un elemento di area $A$ della superficie del nostro corpo sul quale impatteranno un numero infinito di particelle. Questa volta immaginiamo che, invece di urtare elasticamente contro la parete, proseguano tangenzialmente lungo di essa. Questa situazione è fisicamente più realistica e comporta sempre uno scambio di quantità di moto solamente in direzione normale alla superficie. L'unica differenza è che stavolta la componente normale si annullerà piuttosto che invertirsi come prima. La variazione di

velocità normale è pari a $V_\infty \sin\theta$ e il flusso incidente sulla superficie $A$ è pari a $\rho_\infty V_\infty A \sin\theta$. Pertanto la variazione nel tempo della quantità di moto è $\rho_\infty V_\infty^2 A \sin^2\theta$ che, per la seconda legge di Newton, è pari alla forza $F$ applicata dal flusso su $A$:

$$F = \rho_\infty V_\infty^2 A \sin^2\theta\,.$$

Indichiamo con $\rho_\infty$ e $V_\infty$ le condizioni indisturbate del flusso a distanza infinita dal corpo. La forza $F$ trovata richiede adesso un'interpretazione. Newton assunse che il flusso di particelle fosse rettilineo, senza interazioni tra le particelle e soprattutto senza un moto caotico di queste ultime. Perciò $F$ è la forza associata solamente alla *pressione dinamica* ovvero quella pressione unicamente dovuta al moto rettilineo della corrente incidente sul corpo e alla sua energia cinetica. Invece oggi sappiamo che è proprio dal moto caotico delle particelle del fluido che deriva la *pressione statica* (contributo per nulla trascurabile). Pertanto si ha:

$$\frac{F}{A} = p - p_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2\theta\,.$$

A questo punto dalla definizione del $C_p$ otteniamo la cosiddetta *Newton's sine-squared pressure law*:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = 2\sin^2\theta\,. \tag{3}$$

A meno delle varie costanti moltiplicative, la componente lungo la direzione del moto di questa pressione sarà proporzionale a $\sin^3\theta$ e pertanto la resistenza totale è:

$$R(u) = \iint_S \sin^3\theta\, dS\,.$$

Se il corpo è a simmetria radiale, la superficie esterna $S$ potrà essere ottenuta (vedi Fig. 2) ruotando intorno all'asse del corpo la funzione $r(u)$, con $u \in [0, M]$. Inoltre essendo $r(u)$ il raggio della generica sezione ed essendo il dominio d'integrazione una superficie di rotazione, vale la trasformazione:

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}}\,, \quad dS = 2\pi\, r\sqrt{1+r'^2}\,;$$

dove l'apice indica la derivata di $r(u)$ rispetto ad $u$. Sostituendo queste ultime due trasformazioni otteniamo

$$R(u) = 2\pi \int_0^M \frac{r(u)[r'(u)]^3}{1+\left[r'(u)\right]^2}\, du\,.$$

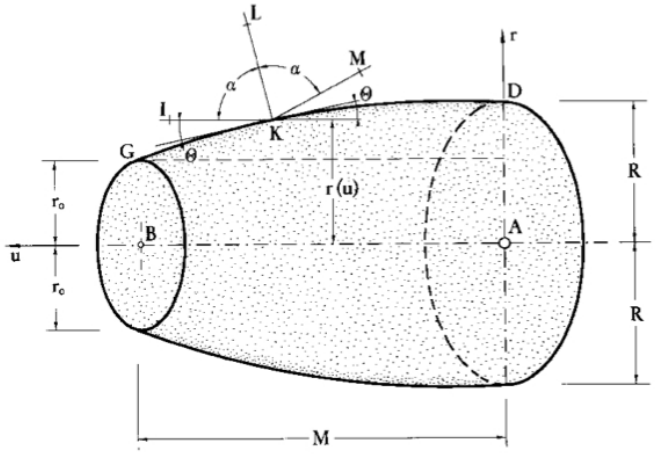


Figura 2: Superficie di rotazione della $r(u)$.

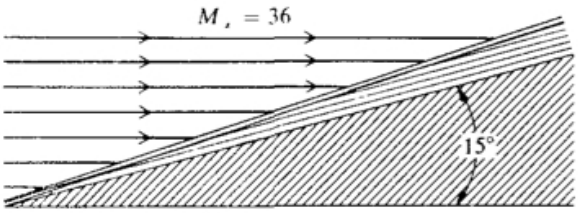


Figura 3: Linee di flusso nel sottile strato d'onda ipersonico.

A questo punto dato che $r \in [0, R]$ restringendoci alle funzioni $r(u)$ strettamente decrescenti (e perciò invertibili) possiamo riscrivere il tutto in funzione di $u(r)$ o più precisamente della $u_r$. Infatti è noto che la derivata della funzione inversa vale $r'(u) = 1/u_r$ ed inoltre $du = u_r dr$. Sostituendo ritroviamo il funzionale (1):

$$R(u) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{1+u_r^2}\, dr\,. \tag{1}$$

Il ragionamento precedentemente fatto per ricavare la legge (3) di variazione del $C_p$ risulta in prima approssimazione esatto (vedi [3]) perchè nelle particolari condizioni di *volo ipersonico* l'onda d'urto si avvicina talmente al corpo che quasi la si può confondere con la superficie di questo. Perciò, il flusso che attraversa l'onda d'urto (Fig. 3) si porta con velocità tangenziale alla superficie del corpo e in un certo

senso verifica proprio le ipotesi avanzate più di tre secoli e mezzo fa da Newton. Questo si può vedere analiticamente nel caso particolare di un flusso ipersonico di aria ($\gamma = 1.4$) intorno ad un profilo a diedro (*slender wedge*). Infatti si ottiene proprio che nel limite ipersonico ($M \to \infty$) l'angolo dell'onda d'urto differisce solamente del $20\%$ dall'angolo di apertura del diedro ovvero $\beta = 1.2\,\theta$ (come rappresentato nella Fig. 3, ottenuta dalla risoluzione esatta dell'urto obliquo a $M_\infty = 36$). Pertanto in prima approssimazione, siamo giustificati a considerare coincidenti il corpo e l'onda d'urto.
Il coefficiente davanti al $\sin^2\theta$ è stato poi ragionevolmente sostituito da Lester Lees [3] con il valore del $C_{p_{max}}$, il massimo coefficiente di pressione assunto nel punto di ristagno. Così facendo si impone che il $C_p$ sia esatto in questo punto e ne consegue poi una previsione più accurata di prima sul resto del corpo.

### 3. Vincoli del problema

Dal punto di vista matematico la determinazione della classe di funzioni $u$ ammissibili è una questione delicata e di fondamentale importanza. Infatti si vede [4] che in assenza di vincoli sulle funzioni ammissibili $u$ il problema risulta essere privo di significato, poiché un profilo dato dalla seguente funzione

$$u_n(x) = n\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \implies \lim_{n\to\infty} R(u_n) = 0 \qquad (4)$$

implica che non esiste alcun minimo per la $R(u)$ avendo che $\inf R(u) = 0$, mentre il funzionale $R(u)$ dev'essere sempre strettamente maggiore di zero. Perciò dobbiamo innanzitutto imporre un vincolo sulla massima altezza del profilo, ovvero $0 \le u \le M$. Vediamo tuttavia che c'è bisogno di un ulteriore vincolo geometrico dato che il profilo

$$u_n(x) = M \sin^2(n\,|x|)$$

soddisferebbe il limite di altezza $0 \le u_n \le M$, ma ancora una volta si ha la (4) e il funzionale non ammette minimo.
Un modo di evitare che si verifichi la (4) e allo stesso tempo di garantire la validità dell'ipotesi di urto singolo da parte delle particelle di fluido è restringere la nostra analisi alla sola classe dei profili convessi, ovvero quei profili descritti da una *funzione concava* $u$ in $\Omega$. Pertanto cercheremo la soluzione del nostro problema nella classe di funzioni

$$C_M(\Omega) := \left\{0 \le u \le M,\ u \text{ concava in } \Omega\right\}.$$

Nella classe delle funzioni concave non negative potremmo anche scegliere altri vincoli, di natura geometrica, per esempio piuttosto che limitare l'altezza potremmo decidere di limitare la superficie esterna del nostro corpo, oppure il volume:

$$S = \iint_{B_R} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,dx + \int_{\partial B_R} u\,d\mathcal{H}^1 \le \overline{S}\,; \quad V = \iint_{B_R} u\,dx \le \overline{V},$$

dove con $d\mathcal{H}^1$ indichiamo la misura di Hausdorff 1-dimensionale dell'elemento infinitesimo di $\partial B_R$, in altre parole la sua lunghezza.

### 4. Profilo a simmetria radiale

Per adesso concentriamoci sul caso particolare di profilo a simmetria radiale. In questa particolare classe di funzioni concave il problema venne già risolto analiticamente da Newton. Infatti egli trovò, in forma parametrica, il profilo ottimo che rende minimo il funzionale (1) risolvendo il problema:

$$\min\left\{\int_0^R \frac{r}{1+u_r^2}\,dr : u(r) \in C_M(B_R)\right\}.$$

Tale profilo minimizza il funzionale $R(u)$ ovvero la resistenza complessiva. Per trovare questo minimo bisogna calcolare la derivata di Fréchet (o derivata funzionale) di $R(u)$ e imporre che questa sia uguale a zero, proprio come si farebbe per una funzione di una o più variabili. La derivata di Fréchet non è altro che una generalizzazione della derivata direzionale, tenendo conto che in questo caso la "direzione" è una funzione.

**Definizione 1.** Derivata di Fréchet
La derivata funzionale di $R(u)$ nella direzione $\phi$, è in generale definita da:

$$\lim_{t\to 0} \frac{R(u+t\phi) - R(u)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(R(u+t\phi)\Big)\Big|_{t=0} \qquad (5)$$

dove $t\phi$ è detta *variazione* di $u$ e la $\phi$ è una *funzione di test*, ovvero una funzione arbitraria liscia e a supporto compatto.

Imponendo ora che la derivata funzionale (5) sia nulla $\forall \phi \in C_0^\infty(B_R) : u + t\phi \in C_M$, si ottiene la cosiddetta *equazione di Eulero-Lagrange*. In realtà si può rilassare la condizione sulla $\phi$ in quanto basta che essa sia differenziabile una sola volta: $\phi \in C_0^1(B_R)$. Eseguendo i calcoli [1], l'*equazione di Eulero-Lagrange* nel nostro caso è:

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{ru_r}{(1+u_r^2)^2}\right)\phi\, dr = 0 \implies \frac{ru_r}{(1+u_r^2)^2} = -c\,. \quad (6)$$

Dovendo questa essere valida $\forall \phi$, dev'essere per forza nulla la derivata rispetto ad $r$, quindi l'espressione derivata sarà pari ad una costante $c > 0$ (dato che $u_r < 0$).
Si è ottenuta così una forma implicita della soluzione cercata. Al fine di esplicitare meglio la curva $u(r)$ rappresentante il profilo ottimo, cerchiamo di scriverla in forma parametrica ponendo: $t = -u_r$. Dalla (6) si ricavano in [1] delle espressioni $r(t)$ ed $u(t)$ funzioni di questo parametro. Integrando una seconda volta si aggiungerà a $c$ un'altra costante. Queste due costanti saranno determinate imponendo delle condizioni al contorno che sono rispettivamente: $u_r(r_0) = 1$ e $u(1) = M$. Sembra essere un mistero come Newton abbia intuito la corretta condizione al contorno: $u_r(r_0^+) = -1$, necessaria affinchè la soluzione trovata sia effettivamente un minimo. Dimostriamo in [1] come questa possa essere direttamente ricavata, altrimenti vedere [5].
Giungiamo infine alla soluzione parametrica trovata da Newton:

$$\begin{cases} r(t) = \dfrac{r_0}{4t}\,\left(1+t^2\right)^2 \\ u(t) = M - \dfrac{r_0}{4}\left(-\dfrac{7}{4} - \ln(t) + t^2 + \dfrac{3}{4}t^4\right) \end{cases} \quad \forall t \in [1, T],$$

dove $T$, la massima pendenza del profilo (in $r = R$), determina $r_0$. Con questo risultato consideriamo il problema risolto nella classe dei profili convessi a simmetria radiale.

### 5. Profili concavi non simmetrici

Modifichiamo adesso il problema originale di Newton, cercando la soluzione nella più ampia classe delle funzioni concave su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (non per forza circolare), senza più restringerci solamente alle funzioni a simmetria radiale. Perciò adesso il funzionale da minimizzare è (2) e la classe di funzioni ammissibili per il problema è:

$$C_M(\Omega) := \left\{u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega),\, 0 \le u \le M,\ u \text{ concava in } \Omega\right\}.$$

Vediamo che la nostra funzione $u$ oltre a dover essere concava e limitata da $M$, dovrà appartenere allo *Spazio di Sobolev* $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, sarebbe a dire che $u \in W^{1,\infty}(\omega) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega$ compattamente contenuto in $\Omega$, ovvero $\overline{\omega} \subset \Omega$ ($\omega$ "non si avvicina" alla frontiera di $\Omega$).
Per una definizione degli *spazi di Sobolev* e delle *derivate deboli*, strumento fondamentale nello studio delle equazioni differenziali, rimandiamo all'Appendice [1].
Si vuole adesso provare il seguente teorema:

**Teorema 1** (Esistenza della soluzione)**.**
*Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso. Allora esiste una funzione $u$ minimizzante il funzionale $R(u)$ in $C_M$.*

La dimostrazione, per la quale rimandiamo all'Appendice [1], consiste essenzialmente nel provare che una successione $\{u_k\}$ minimizzante $R(u)$ in $C_M$ risulta compatta nella topologia forte di $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, con $p \in [1, \infty)$. A questo fine è cruciale la concavità delle funzioni $u_k$. Fatto questo, il *Teorema della convergenza dominata di Lebesgue* ci garantisce che il limite $u \in C_M$ delle funzioni $u_k$ minimizza il funzionale $R(u)$.

**Teorema 2** (Non unicità della soluzione)**.**
*Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso. Allora la funzione $u$ minimizzante è in generale non unica, perché se $\Omega = B_R$ (cerchio di raggio R) la soluzione $u$ è non radiale. In particolare la soluzione del problema non è unica, potendosi ruotare per generare infinite altre soluzioni.*

Si possono mostrare diverse prove della non simmetria del profilo ottimo. Una consiste nell'esibire esplicitamente una funzione non radiale $u_G \in C_M$ tale che $R(u_G) < R(u_N)$. Questa funzione $u_G$ (in Fig. 4) che assomiglia alla punta di un cacciavite, è stata costruita da P. Guasoni [6] (si veda [1] per la definizione).
In alternativa, si può ragionare come segue: il funzionale $R(u)$ deve avere, nel punto di minimo, la *variazione se-*

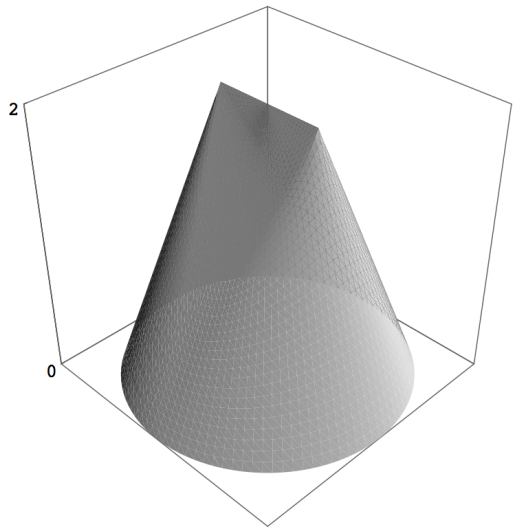


Figura 4: Soluzione $u_G$ a "cacciavite".

*conda* (che gioca il ruolo della derivata direzionale del second'ordine) non negativa lungo ogni direzione ammissibile. Qualora questa condizione necessaria venisse meno, avremmo provato che $u_N$ non è la soluzione ottima nella classe di funzioni considerata.
Un calcolo relativamente semplice (cfr. [1]) mostra che la variazione seconda nella "direzione " $\phi$ vale:

$$\delta^2 R = \iint_{B_R} \frac{2[4(\nabla u_N \cdot \nabla\phi)^2 - (1+|\nabla u_N|^2)|\nabla\phi|^2]}{(1+|\nabla u_N|^2)^3}\, dx\,. \quad (7)$$

Ovviamente, prendendo funzioni test $\phi$ radiali, la (7) risulta sicuramente positiva. Si può invece provare che funzioni test del tipo $\phi(r,\theta) = \eta(r)\sin(k\theta)$, con $k$ molto grande (tale che $u_N + \phi(r,\theta) \in C_M$), possono rendere negativa la variazione seconda. I dettagli si trovano in [1].
Infine, è interessante il seguente risultato generale:

**Teorema 3.**
*Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme convesso, e la funzione $u$ un minimizzante del funzionale $R(u)$. Allora $|\nabla u| \notin (0,1)$ q.o. in $\Omega$.*

Si procede per assurdo ipotizzando che la $u$ minimizzante $R(u)$ abbia $|\nabla u(x)| \in (0,1)$ in un insieme $N \subset \Omega$ di misura

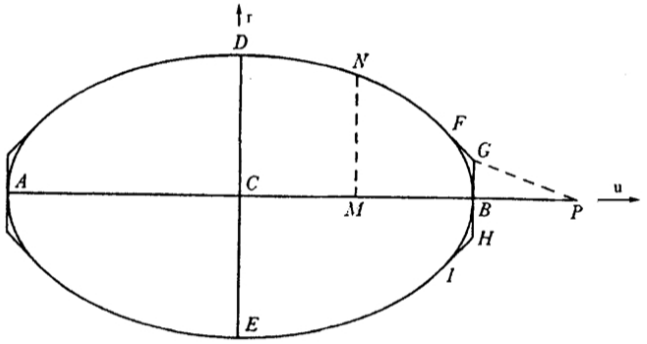


Figura 5: Disegno di Newton, si veda: [7, pag. 462].

positiva . Consideriamo adesso un profilo $w \in C_M$ che si mantiene sempre al di sopra di $u$, la cui pendenza non appartiene mai all'intervallo $(0,1)$:

$$w(x) := \inf\Big\{t(x) : t(x) \text{ piani tangenti ad } u \text{ e } |\nabla t| \notin (0,1)\Big\}\,,$$

che sarebbe il tratto $FGHI$ in Fig. 5. I profili $u$ e $w$ sono tangenti solo dove $|\nabla u| = 0$ e $|\nabla u| \geq 1$. Per mostrare che:

$$R(w) = \tilde{R}(w) \leq \tilde{R}(u) < R(u)\,,$$

minoriamo $R(u)$ "rilassando" il funzionale, ovvero sostituendo alla mappa $f(s) = 1/(1+s^2)$ la più grande funzione convessa $\tilde{f}(s)$ tale che $\tilde{f}(s) \leq f(s)$. Una dimostrazione più dettagliata del Teorema è riportata nell'Appendice [1].

## 6. Ulteriori generalizzazioni e problemi aperti

Oltre alla naturale generalizzazione del problema alla classe $C_M$, se ne possono studiare altre varianti altrettanto interessanti. Ad esempio, B. Kawohl in [8] studia il problema in una classe di funzioni più ampia di $C_M$. Viene richiesto al profilo di rispettare esclusivamente la *condizione di urto singolo* delle particelle. I profili che appartengono a questa classe $S_M$, verificheranno la:

$$u(y) \leq\ u(x) + \frac{1}{2}\left(u'(x) - \frac{1}{u'(x)}\right)(y-x)\,, \qquad y > x\,,$$

condizione più debole del vincolo di concavità. Per esempio, il profilo $u_1$ mostrato in Fig. 6 ha una resistenza minore di $u_N$. Mostreremo meglio in [1] come si ottiene questo

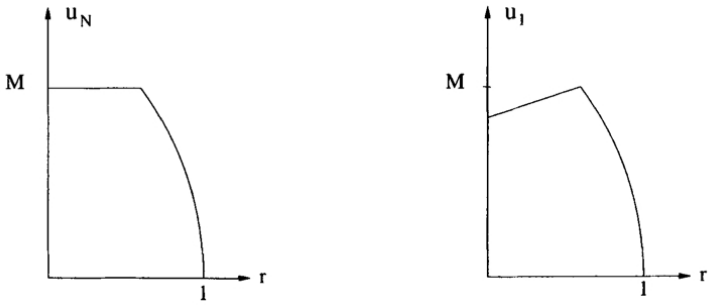


Figura 6: Soluzione ottimale di Newton $u_N$ e la modifica $u_1$.

profilo (che non è il minimo in $S_M$) e da dove si ricava la relazione precedente. In questa classe, ancora oggi, non è stata provata l'esistenza di una soluzione.

Altrimenti, rimanendo nella classe dei profili concavi a simmetria radiale, si può tentare (in una maniera molto semplificata) di modellizzare anche la resistenza di attrito. Si andrà così ad aggiungere un contributo $S(u)$ alla resistenza complessiva $R_S(u)$. Ipotizziamo che l'attrito sia dovuto al trasferimento (durante l'urto) di parte della componente tangenziale della quantità di moto. Pertanto a meno della costante $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$ , si ha:

$$S(u) = \iint_S \mu_0 \sin^2\theta \cos\theta \, dS = 2\pi \int_0^R \frac{\mu_0 u_r r}{1+u_r^2}\, dr\,, \qquad (8)$$

$$R_S(u) = \int_0^R \frac{(1-\mu_0 u_r) r}{1+u_r^2} dr\,,$$

dove $\mu_0$ è un coefficiente d'attrito ($0 \le \mu_0 \le 1$). La soluzione, come si può vedere in [2], è qualitativamente uguale alla $u_N$ del caso non viscoso, con l'unica differenza che in questo caso l'ampiezza della parte piatta (determinata da $r_0$) dipenderà dal valore scelto per $\mu_0$. Questo è ovvio, dato che all'aumentare di $\mu_0$ segue un incremento di $r_0$, così da ridurre la superficie laterale (unica sorgente del contributo (8) alla resistenza).

A tutt'oggi non si è ancora trovata una forma analitica per il profilo ottimo $C_M$. Infatti il vincolo di convessità rende i calcoli numerici piuttosto difficili. Non è neanche chiaro se la regione superiore, dove $\{u = M\}$, abbia dimensione $2$ o se si riduca ad un segmento. Inoltre, non si sa se la soluzione $u$ sia regolare nella regione in cui $\{u < M\}$, anche se i calcoli numerici sembrano dimostrare il contrario. Tuttavia manca ancora una prova rigorosa di questo.

La pur breve discussione svolta in queste pagine mostra chiaramente che il problema formulato da Newton, pur essendo estremamente semplificato (al punto da limitare la sua applicabilità a situazioni molto particolari), risulta però già molto interessante e "ricco" da un punto di vista matematico. Ancora oggi, a distanza di oltre tre secoli dalla sua formulazione, presenta punti non completamente chiariti ed è oggetto di intensa ricerca scientifica.

**Bibliografia**

[1] A. Gallegati. Appendice alla tesi di laurea triennale. www.mat.uniroma1.it/people/dallaglio/gallegati/, 2014. Il problema di Newton di minima resistenza.

[2] D. Horstmann, B. Kawohl, and P. Villaggio. Newton's aerodynamic problem in the presence of friction. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 9(3):295–307, 2002.

[3] J. D. Anderson, Jr. *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. AIAA Education Series, 2nd edition, 2006.

[4] G. Buttazzo. A survey on the newton problem of optimal profiles. In *Variational Analysis and Aerospace Engineering*, volume 33, pages 33–48. Springer New York, 2009.

[5] A. Miele. *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. Academic Press, New York, 1965.

[6] P. Guasoni. Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi. Master's thesis, Università degli Studi di Pisa, 1996.

[7] D.T. Whiteside. *The Mathematical Papers of ISAAC NEWTON*, volume VI. Cambridge Univ. Press, 1974.

[8] Bernd Kawohl. Some nonconvex shape optimization problems. In *Optimal shape design*, volume 1740, pages 7–46. Springer Berlin Heidelberg, 1998.