CAPITOLO 1

SPAZI METRICI

1-1 DEFINIZIONI FONDAMENTALI

1. Definizione Una *distanza* (o *metrica*) d su un insieme X è una funzione $d(x, y)$ che ad ogni coppia $(x, y) \in X \times X$ associa un numero reale, e tale che, per ogni $x, y, z \in X$, valgono le proprietà seguenti:
(a) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(b) $d(x, y) = d(y, x)$;
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(disuguaglianza triangolare).*
L'insieme X dotato della distanza d (o più precisamente la coppia (X, d)) si chiama *spazio metrico*. Gli elementi di X si dicono *punti*.

2. Definizione Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una *norma* su X è una funzione $\| \cdot \|$ che ad ogni $x \in X$ associa un numero reale (la *norma* di x), tale che per ogni $x, y \in X$ e ogni $\lambda \in \mathbb{K}$:
(a) $\|x\| \geq 0$, e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(disuguaglianza triangolare).*
Lo spazio X (la coppia $(X, \| \cdot \|)$) si dice *spazio normato*.

Chiaramente, un qualunque sottoinsieme Y di uno spazio metrico X è in modo naturale uno spazio metrico; come distanza basta prendere la restrizione di d a $Y \times Y$, che è detta la *metrica indotta su* Y. Analogamente un sottospazio vettoriale di uno spazio normato è ancora uno spazio normato (con la *norma indotta*).

3. Osservazione Uno spazio normato è in particolare uno spazio metrico: infatti la funzione $d(x, y) = \|x - y\|$ è una metrica, come è facile verificare (verificare!). Tale distanza si dice *indotta* dalla norma $\| \cdot \|$

4. Esempio Gli spazi vettoriali fondamentali sono gli spazi $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, formati dalle

n-uple ordinate di numeri reali con le operazioni naturali. Una distanza su $\mathbb{R}$ è data da $d(x,y) = |x-y|$, detta *distanza (metrica) euclidea*; una norma è data da $\|x\| = |x|$ (il modulo di x), detta *norma euclidea*. È chiaro che la distanza euclidea è indotta dalla norma euclidea. Su $\mathbb{R}^n$ la norma euclidea è definita come segue: per $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

e quindi la distanza indotta sarà

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}.$$

Per $n = 1$ si riottengono le espressioni precedenti. Nel seguito supporremo sempre (dove non venga specificata esplicitamente una distanza diversa) che $\mathbb{R}^n$ sia dotato della distanza e della norma euclidea.

Una norma su $\mathbb{C}$ è data dal modulo dei numeri complessi $|\cdot|$, e la distanza indotta si dice ancora euclidea.

Su $\mathbb{R}^n$ si possono definire altre norme e distanze. Le più importanti sono: la *norma del massimo* $|\cdot|_\infty$, definita come

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

che induce la *distanza del massimo* $d_\infty(x,y) = |x-y|_\infty$, e la norma $|\cdot|_1$ definita ome

$$|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

che induce la distanza $d_1(x,y) = |x-y|_1$. Notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ valgono le disuguaglianze

$$|x|_\infty \leq |x| \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$$

ossia le varie norme introdotte sono *equivalenti*.

5. Definizione La *palla* (o *intorno sferico*, o *sfera*) di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$ è l'insieme $B(x_0, r) = \{x \in X \ : \ d(x, x_0) < r\}$.

È facile vedere (esercizi 1.10–1.12) che una palla in uno spazio metrico può assumere forme molto diverse; solo nel caso della metrica euclidea si ottiene effettivamente un insieme di forma sferica.

6. Definizione Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un *prodotto scalare* su X è una funzione $(\cdot,\cdot)$ da $X \times X$ in $\mathbb{K}$ tale che per ogni $x, y, z \in X$ e ogni $\lambda \in \mathbb{K}$:
(a) $(x,x) \geq 0$, e $(x,x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
(b) $(\lambda x + y, z) = \lambda(x,z) + (y,z)$;
(c) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.
Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la terza proprietà ovviamente si riduce a $(x,y) = (y,x)$. Notare che da (b) e (c) segue che il prodotto scalare è lineare sia nella prima che nella seconda componente.

7. Osservazione Un prodotto scalare su X induce in modo naturale una norma su X data da $\|x\|^2 = (x, x)$. Le verifiche sono elementari, tranne la disuguaglianza triangolare, che segue immediatamente dalla seguente *disuguaglianza di Schwarz*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

[che si dimostra come segue: moltiplicando $x + \lambda y$ per sé stesso

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + |\lambda|^2 (y, y) + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y);$$

se $(x, y) = 0$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti scegliendo $\lambda = t(x, y)/|(y, x)|$ con t reale arbitrario, otteniamo

$$0 \leq \|x\|^2 + 2t|(x, y)| + t^2 \|y\|^2.$$

Fissati x, y, questa disuguaglianza vale per qualunque $t \in \mathbb{R}$, quindi il discriminante del polinomio di grado 2 a secondo membro deve essere negativo, da cui segue la tesi]. A questo punto è facile vedere che la norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ verifica la disuguaglianza triangolare:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

ESERCIZI

1 Verificare che la norma euclidea su $\mathbb{R}$ è effettivamente una norma. (Ne segue che la distanza euclidea è una distanza).

2 Il *prodotto scalare* di due vettori di $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$, è definito come $(a, b) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Verificare che (a, b) soddisfa la Definizione 6.

3 Verificare che la norma euclidea è indotta dal prodotto scalare definito nell'esercizio 1.2.

4 Verificare che la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$ è una norma (e quindi che la distanza euclidea è una distanza).

5 Dato un insieme X, la funzione $d(x, y)$ che vale 0 se $x = y$ e 1 altrimenti è una distanza (detta la *distanza discreta*; X è detto spazio metrico *discreto*).

6 Le seguenti funzioni sono norme su $\mathbb{R}^n$: $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$, $|x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

7 Le seguenti funzioni sono distanze su $\mathbb{R}^n$: $d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$, $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.

8 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $C_b(A) \equiv BC(A)$ l'insieme di tutte le funzioni continue e limitate su A. $C_b(A)$ è uno spazio vettoriale, ed è uno spazio normato con $\|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)|$.

9 Sia A l'intervallo aperto $]0, 1[$. Calcolare $d(f, g)$ dove d è la distanza indotta dalla norma dell'esercizio 1.8, mentre f, g sono:

$$f = x, \ g = 1 - x^2; \qquad f = xe^{-x}, \ g = e^x; \qquad f = |x - 1/2|, \ g = x^2.$$

10 Disegnare $B(0, 1)$ (la palla di centro l'origine e raggio 1) in $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea e le metriche d_1, d_2 dell'esercizio 1.7.

11 Come è fatta una palla nello spazio definito nell' esercizio 1.5?

12 Come è fatta una palla di $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea?

13 Dimostrare la seguente disuguaglianza: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$. [Si chiede di dimostrare che $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$; applicare la dis. triangolare a y e $z = x - y$, poi a x e $z = y - x$.]

14 Dimostrare la disuguaglianza $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

---

01 Dato uno spazio metrico (X, d), dimostrare che sono distanze le funzioni
$d_3(x, y) = k \cdot d(x, y)$, $k > 0$ fissata;
$d_4(x, y) = 1 \wedge d(x, y)$;
$d_5(x, y) = d(x, y)/[1 + d(x, y)]$.

02 Sia $\|\cdot\|$ una norma su X. Quali di queste funzioni sono norme: $k \cdot \|x\|$ $(k > 0)$, $1 \wedge \|x\|$, $\|x\|/[1 + \|x\|]$?

03 Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione che si annulla solo in 0 e tale che se $a \leq b + c$ allora $f(a) \leq f(b) + f(c)$. Mostrare che se $d(x, y)$ è una distanza su X, anche $d_6(x, y) = f(d(x, y))$ lo è.

04 Mostrare con un controesempio che, in generale, se $d(x, y)$ è una distanza, la funzione $[d(x, y)]^2$ può non essere una distanza. Analogamente, il quadrato di una norma può non essere una norma. Che si può dire della radice quadrata di una norma (distanza)?

05 Due norme $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ sullo stesso spazio metrico X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti $c, C > 0$ tali che $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ per ogni $x \in X$. Mostrare che le norme dell'esercizio 1.6 sono equivalenti.

06 Sia (X, d) uno spazio metrico, e $P(X)$ l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Su $P(X) \times P(X)$ definiamo la funzione $d(A, B) = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. È vero che $d(A, B)$ è una distanza su $P(X)$?

07 Dato uno spazio metrico (X, d), il *diametro* di un insieme $A \subseteq X$ è definito come il numero $\delta(A) = \sup\{d(x, y)\ x, y \in A\}$. Dimostrare che, se $A \cap B \neq \emptyset$, si ha $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$. E in generale?

08 Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Mostrare che $X \times Y$ è uno spazio metrico con la distanza $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ (*spazio prodotto*).

09 Sia X uno spazio vettoriale, munito della distanza discreta (es. 1.5). Mostrare che non esiste nessuna norma su X che induce tale distanza.

1-2 TOPOLOGIA DEGLI SPAZI METRICI

Ricordiamo che uno *spazio topologico* è un insieme X dotato di una *topologia*, ossia una famiglia τ di sottoinsiemi di X, detti *aperti*, con le seguenti proprietà: (a) $\emptyset$ e X sono aperti; (b) unione di aperti è un aperto; (c) intersezione di due aperti è un aperto.

Ricordiamo anche la terminologia relativa: il punto x si dice *interno* all'insieme U se esiste un aperto A con $x \in A \subseteq U$; se x è interno ad U si dice anche che U è un *intorno* di x; l'insieme di tutti i punti interni ad un insieme C si dice *parte interna* di C e si indica con $\mathring{C}$. Un punto si dice *aderente* all'insieme C se ogni suo intorno ha intersezione non vuota con C; l'insieme di tutti i punti aderenti a C si indica con $\overline{C}$ e si dice *chiusura* di C. Gli insiemi *chiusi* sono i complementari degli aperti. La *frontiera* di C è l'insieme $\partial C = \overline{C} \setminus \mathring{C}$. Un punto x si dice *di accumulazione* per l'insieme C se ogni suo intorno contiene un punto di C diverso da x. Un punto $x \in C$ si dice *isolato* se esiste un suo intorno la cui intersezione con C è costituita dal solo x. Un insieme B si dice *denso in* A se $A \subseteq \overline{B}$, e *denso* se $\overline{B} = X$.

Sia (X, d) uno spazio metrico.

1. Definizione Su X è definita in modo naturale una topologia come segue: un insieme $A \subseteq X$ è aperto se per ogni $x \in A$ c'è una palla con centro in x contenuta in A (naturalmente di raggio positivo). Allora si verificano facilmente le proprietà seguenti.

Sia $C \subseteq X$. Un punto $x_0 \in C$ è interno a C se esiste una palla di centro x_0 contenuta in C.

Un punto $x_0 \in X$ (anche esterno a C) è aderente a C se ogni palla di centro x_0 ha intersezione non vuota con C.

Un punto $x_0 \in X$ (anche esterno a C) è un punto di accumulazione per C se ogni palla di centro x_0 ha intersezione non vuota con $C \setminus \{x_0\}$. Un punto $x_0 \in C$ è isolato in C se esiste una palla di centro x_0 la cui intersezione con C è costituita dal solo punto x_0.

2. Definizione Una *successione* in X è una funzione da $\mathbb{N}$ (numeri naturali) in X, e si indica con la notazione $\{x_k\}_{k\geq 1}$. La successione *converge* ad un punto $x_0 \in X$ se per ogni palla $B(x_0, \epsilon)$ esiste un indice k_ϵ tale che $x_k \in B(x_0, \epsilon)$ per $k \geq k_\epsilon$; equivalentemente, x_k converge ad x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{k}$ tale che $d(x_k, x_0) < \epsilon$ per $k \geq \overline{k}$; o ancora, x_k converge a x_0 se $d(x_k, x_0) \to 0$. Useremo la notazione $x_k \to x_0$.

In uno spazio metrico, per verificare le proprietà topologiche è sufficiente utilizzare le successioni. Ad esempio: un insieme C è chiuso se e solo se ogni successione in C, che converge, converge ad un punto di C. Un insieme è aperto se e solo se ogni successione che converge ad un punto di A cade definitivamente dentro A. Un punto è aderente a C se esiste una successione di punti di C che converge ad esso.

Su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$ si pone sempre la topologia *euclidea*, indotta dalla distanza euclidea. Notiamo in particolare che su $\mathbb{R}$ la palla $B(x_0, r)$ è esattamente l'intervallo aperto $]x_0 - r, x_0 + r[$, e che gli aperti si possono sempre scrivere come unione di una successione di intervalli aperti disgiunti.

Considerare con molta attenzione l'esempio seguente: $\mathbb{Q}$ con la metrica euclidea è uno spazio metrico; prendiamo la successione $x_n = (1+1/n)^n$, che come è noto converge al numero e; vediamo che $x_n \in \mathbb{Q}$, mentre $e \notin \mathbb{Q}$. Quindi la successione x_n *non converge* nello spazio metrico $\mathbb{Q}$ (ma converge soltanto nello spazio $\mathbb{R}$).

Un esempio ancora più semplice è il seguente: se $X =]0, 1[$ con la distanza euclidea, la successione $x_n = 1/n$ non converge in X; infatti se convergesse a $x_0 \in X$ dovrebbe convergervi anche come successione di $\mathbb{R}$, ma è chiaro che in $\mathbb{R}$ si ha $x_n \to 0 \notin X$.

Nei seguenti esercizi, lo spazio topologico considerato è sempre uno spazio metrico con la topologia indotta dalla metrica.

ESERCIZI

1 Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti e quali chiusi: $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1]$, $]0, 1[$; $\mathbb{Q}$ (l'insieme dei numeri razionali); $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $]0, 1[\cup \mathbb{Q}$, $[0, 1] \cup \mathbb{Q}$.

2 Verificare che la Def.1 dà effettivamente una topologia, e dimostrare le proprietà enunciate nella definizione. Verificare le affermazioni contenute nella Def.2.

3 Un insieme è chiuso se e solo se per ogni punto nel suo complementare esiste una palla con centro in quel punto, tutta contenuta nel complementare.

4 Trovare la parte interna, la chiusura, la frontiera e tutti i punti di accumulazione degli insiemi dell'esercizio 2.1.

5 Un punto di A aderente ad A che non sia di accumulazione, è isolato. Dare inoltre un esempio di punto di accumulazione che non appartiene all'insieme.

6 Un punto x_0 è aderente ad un insieme se e solo se esiste una successione di punti dell'insieme convergente ad x_0. Se A non è $\emptyset$ o tutto lo spazio, un punto è di frontiera per A se e solo se esistono una successione di punti di A e una di punti del complementare di A, entrambi convergenti a tale punto.

7 Se C è chiuso e x_n è una successione di punti di C che converge a ξ, allora $\xi \in C$. Se A è un insieme aperto e x_n converge ad un punto di A, allora *definitivamente* ($\equiv$a partire da un certo indice in poi) $x_n \in A$.

8 Dimostrare le seguenti formule: $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (ma non sempre $=$, trovare un controesempio); $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; $(\mathring{A})^\circ = \mathring{A}$; $\mathring{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$. Inoltre, se $A \subseteq B$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ e $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

9 Un aperto è unione di tutte le sfere contenute in esso.

10 L'intersezione di una famiglia qualunque (anche infinita) di chiusi è un insieme chiuso. L'unione di un numero finito di chiusi è un insieme chiuso.

11 Verificare che i tre enunciati della Definizione 2 sono equivalenti.

12 Verificare che in $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea la Definizione 2 coincide con la definizione consueta di successione convergente.

13 Una successione di $\mathbb{R}^n$ (metrica euclidea) converge se e solo se convergono le singole componenti della successione.

14 Un insieme è denso se e solo ha intersezione non vuota con qualunque aperto (non vuoto). Un insieme è denso se e solo se ha intersezione non vuota con qualunque palla.

15 La chiusura di un insieme è un chiuso. Un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura. La parte interna di un insieme è un aperto. Un insieme è aperto se e solo se coincide con la sua parte interna.

16 La chiusura di un insieme coincide con l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono. La parte interna di un insieme coincide con l'unione di tutti gli aperti contenuti in esso.

17 Un punto x è di accumulazione per $A \subseteq X$ se e solo se esiste una successione di punti di A, distinti da x, che converge a x.

18 Calcolare il limite delle successioni di $\mathbb{R}^2$: $(1/k, 1/k^2)$; $(e^{-k}, k\sin(1/k))$; $(\log(1+1/k), k^2e^{-k})$.

19 In uno spazio normato, se $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ e $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$, allora $x_n + \lambda_n y_n \to x_0 + \lambda y_0$.

---

01 Mostrare che in generale l'intersezione di infiniti aperti può non essere un aperto (e quindi l'unione di infiniti chiusi può non essere un chiuso).

02 Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, è possibile ottenere una successione di nuovi insiemi prendendo il complementare di A, poi la chiusura dell'insieme ottenuto, poi il complementare dell'insieme ottenuto, e così via alternativamente. Oppure si può cominciare prendendo la chiusura di A, poi il complementare dell'insieme ottenuto, e così via. Quanti insiemi diversi si possono ottenere in questo modo? [al più 14]

03 Data una successione in $\mathbb{R}$, caratterizzare l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

04 È vero che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme è un chiuso?

05 Dimostrare che la chiusura della palla $B(x_0, r)$ è contenuta nella *palla chiusa* $\{x : d(x, x_0) \leq r\}$. Può succedere che non coincidano? [es. 1.5]

06 Un aperto di $\mathbb{R}$ si può scrivere in un solo modo come unione numerabile di intervalli aperti, disgiunti, non vuoti.

07 In uno spazio metrico (X, d), la distanza di un punto x da un insieme $A \subseteq X$ è definita come il numero $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Mostrare che $x \in \overline{A}$ se e solo se $d(x, A) = 0$.

08 Una successione $\{x_n\}$ converge al punto x se e solo se da ogni sottosuccessione di $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente ad x.

1-3 CONTINUITÀ

Siano (X, d) e (Y, d_1) due spazi metrici.

1. Definizione Siano $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *continua* in x_0 se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $d(x, x_0) < \delta$ si ha $d_1(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. La funzione si dice continua su A se è continua in ogni punto di A.

È chiaro che si tratta della naturale generalizzazione della continuità per funzioni di variabili reali, nel qual caso si aveva $d(x, y) = d_1(x, y) = |x - y|$, distanza euclidea sia in partenza che in arrivo.

2. Esempio Fissiamo $x_0 \in X$. La funzione $f(x) = d(x, x_0)$ da X in $\mathbb{R}$ è continua (su X): infatti preso un qualunque $x_1 \in X$ si ha

$$|f(x) - f(x_1)| = |d(x, x_0) - d(x_1, x_0)| \leq d(x, x_1)$$

(vedi es. 1.14) e quindi per verificare la definizione basta prendere $\epsilon = \delta$.

Ricordiamo che x è di accumulazione per A se esiste una successione di punti di A, distinti da x, che converge a x.

3. Definizione Siano $A \subseteq X$, $f : A \to Y$, x_0 punto di accumulazione per A, $y_0 \in Y$. Si dice che il *limite di f per x che tende a x_0 è y_0*, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per $x \in A \setminus \{x_0\}$, $d(x, x_0) < \delta$ si ha $f(x) \in B(y_0, \epsilon)$. Talvolta si scrive anche $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$.

Si vede facilmente che f è continua in x_0 se e solo se il limite di $f(x)$ in x_0 esiste ed è uguale ad $f(x_0)$, oppure se x è un punto isolato in A.

4. Esempio Prendiamo $Y = \mathbb{R}$, sempre con la metrica euclidea *(funzione a valori reali)*. Allora f ha limite L in x_0 se e solo se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per $x \in A \setminus \{x_0\}$, $d(x, x_0) < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \epsilon$.

Se invece prendiamo $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ *(funzione di più variabili reali)* abbiamo: f ha limite L in x_0 se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$ (notare che $x \neq x_0$ dal momento che $0 < |x - x_0|$).

Infine, consideriamo il caso $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Allora $f : X \to Y$ può essere vista come una m-upla di funzioni $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (f_j è la funzione il cui valore in x è dato dalla j-esima componente di $f(x)$). È elementare vedere che f tende ad $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ per $x \to \xi$ se e solo se f_j tende a η_j, $j = 1, \ldots, m$; quindi f è continua in ξ se e solo se lo sono le funzioni $f_1, \ldots, f_m$.

5. Osservazione Per verificare la continuità di una funzione fra spazi metrici è sufficiente utilizzare le successioni, esattamente come per verificare le proprietà topologiche degli insiemi. Per esprimere più precisamente questo fatto introduciamo una nuova definizione.

Dati due spazi metrici X, Y, un insieme $A \subseteq X$, una funzione $f : A \to Y$ e un punto $x_0 \in A$, diciamo che f è *continua per successioni* in x_0 se vale la proprietà seguente: per ogni successione $x_n \in A$ convergente a x_0, la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$. È facile verificare che:

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è continua per successioni in } x_0.$$

Più in generale, possiamo dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to y_0$. In altri termini, il Teorema ponte vale anche per funzioni fra spazi metrici.

6. Osservazione Sia $f : X \to Y$ un'applicazione fra due spazi metrici. Sappiamo già che f si dice continua se è continua in tutti i punti. Ma c'è un modo equivalente di enunciare questa proprietà, che usa solo la nozione di insieme aperto e quindi si può utilizzare anche su qualunque spazio topologico:

$$f : X \to Y \text{ è continua } \Leftrightarrow \text{ per ogni aperto } A \text{ di } Y,\ f^{-1}(A) \text{ è un aperto di } X$$

Quindi f è continua se e solo se le immagini inverse (tramite f) degli aperti sono ancora aperti. Verificate per esercizio questa semplice proprietà

I concetti seguenti sono naturali estensioni dei corrispondenti concetti per funzioni di una variabile.

7. Definizione Sia $A \subseteq X$. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *uniformemente continua in* A se $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta$ implica $d_1(f(x), f(y)) < \epsilon$. Inoltre f si dice *lipschitziana* di *costante* k ($k \geq 0$) se per tutti gli $x, y \in A$ vale

$$d_1(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

8. Esempio Una applicazione lineare $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (con le norme euclidee) è lipschitziana. Infatti, rappresentiamo Q come al solito con una matrice $Q = [q_{jk}]_{j,k=1}^n$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ possiamo scrivere, usando Cauchy-Schwartz,

$$\left|\sum_{k=1}^n q_{jk}v_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n q_{jk}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n v_k^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \cdot \max_{j,k} |q_{jk}| \cdot |v|$$

e quindi

$$|Qv| = \left(\sum_{j=1}^m \left|\sum_{k=1}^n q_{jk}v_k\right|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{mn} \cdot \max_{j,k} |q_{jk}| \cdot |v|.$$

Ne segue che per ogni coppia di vettori v, w si ha

$$|Qw - Qv| \leq C|v - w|, \qquad \text{dove } C = \sqrt{mn} \cdot \max_{j,k} |q_{jk}|$$

ossia Q è lipschitziana di costante C. (Si noti che la costante C ottenuta in questo modo non è ottimale; la costante ottimale nella disuguaglianza $|Qv| \leq C|v|$ è più piccola e si chiama la *norma* dell'applicazione lineare.)

Come si ricorderà, una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice limitata se esiste una costante M tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni x. Tale concetto si estende nel modo seguente.

9. Definizione Un insieme $A \subseteq X$ si dice *limitato* se è contenuto in una palla. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *limitata* se la sua immagine $f(X)$ è limitata.

ESERCIZI

1 Dimostrare l'affermazione contenuta nella Definizione 3.

2 Dimostrare le affermazioni nell'Esempio 4.

3 Una funzione $f : X \to Y$ è continua in x_0 se e solo se, per ogni palla V centrata in $f(x_0)$ esiste una palla U centrata in x_0 tale che $f(U) \subseteq V$. Una funzione $f : X \to Y$ è continua in x_0 se e solo se per ogni intorno V di $f(x_0)$ si ha che $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0.

4 Una funzione $f : X \to Y$ è continua (su X) se e solo se per ogni aperto A di Y l'immagine inversa $f^{-1}(A)$ è aperta.

5 Una funzione lipschitziana è uniformemente continua.

6 Una funzione uniformemente continua è continua.

7 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana. Allora esistono costanti $\alpha, \beta \geq 0$ tali che $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$ (ossia f è a *crescita lineare*).

8 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è lipschitziana se e solo se la derivata è limitata.

9 Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uniformemente continue. Allora anche $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) lo sono. Che si può dire di $f \cdot g$?

10 Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ limitate. Dimostrare che $f + g$ è limitata. Per $m = 1$, dimostrare che $f \cdot g$ è limitata.

11 Una funzione $f : X \to Y$ è limitata se e solo se esiste una costante M tale che $d_1(f(x), f(y)) < M$ per tutti gli $x, y \in X$.

12 Verificare l'Esempio 2.

13 Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici, e siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

14 Sia $x_0 \in X$. La funzione $f(x) = d(x, x_0)$ da X in $\mathbb{R}$ è Lipschitziana di costante 1.

---

01 Un monomio in due variabili, $f(x, y) = x^n y^m$, è una funzione continua. Un polinomio in due variabili è una funzione continua. Un polinomio in k variabili è una funzione continua.

02 $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se, per ogni successione x_n convergente a x_0, la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

03 $f : X \to Y$ ha limite y_0 per $x \to x_0$ ($x_0 \in X$) se e solo se, per ogni successione x_n convergente a x_0 con $x_n \neq x_0$, la successione $f(x_n)$ converge a y_0.

04 Sia A denso in X, $f : A \to Y$ uniformemente continua in A. Allora esiste un'unica funzione continua $\tilde{f} : X \to Y$ che estende f. Inoltre la funzione $\tilde{f}$ è uniformemente continua.

1-4 COMPLETEZZA E SPAZI DI BANACH

Sia (X, d) uno spazio metrico.

1. Definizione Una successione x_n in X si dice *di Cauchy* se $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per $n, m \geq n_\epsilon$. Più semplicemente: x_n è di Cauchy se $d(x_n, x_m) \to 0$ per $n, m \to \infty$.

Lo spazio metrico X si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Si riconoscerà la vecchia definizione di successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ nel nuovo contesto. Osserviamo subito che se uno spazio metrico è completo, tutti i suoi sottoinsiemi chiusi sono spazi metrici completi con la metrica indotta [sia C chiuso in X completo; data una successione di Cauchy in C, essa lo è anche in X, quindi converge a un punto di X; ma tale punto deve appartenere a C, vedi es. 2.6]. È facile verificare che vale anche il viceversa: ogni sottoinsieme completo è chiuso.

Naturalmente la definizione di successione di Cauchy vale anche per uno spazio normato, usando la metrica indotta dalla norma: x_n è di Cauchy in $(X, \|\cdot\|)$ normato se $\forall \epsilon\ \exists n_\epsilon$ tale che per $n, m \geq n_\epsilon$ si ha $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

2. Esempio Come visto nel Paragrafo 2, $\mathbb{Q}$ non è completo; infatti esistono successioni di $\mathbb{Q}$ che convergono in $\mathbb{R}$, quindi sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ [es. 4.1], quindi sono di Cauchy anche in $\mathbb{Q}$, ma il loro limite non appartiene a $\mathbb{Q}$, quindi non convergono in $\mathbb{Q}$. Analogamente, $]0, 1[$ con la distanza euclidea non è completo.

3. Definizione Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach.*

4. Esempio Il più semplice spazio di Banach è $\mathbb{R}$ (e la dimostrazione della completezza è il classico teorema che dice: una successione converge se e solo se è di Cauchy). Anche $\mathbb{R}^n$ è di Banach [infatti, una successione in $\mathbb{R}^n$ è di Cauchy se e solo se le sue componenti sono successioni di Cauchy; e d'altra parte, una successione di $\mathbb{R}^n$ converge se e solo se convergono le sue componenti].

Siano (X, d), (Y, d_1) spazi metrici.

5. Definizione L'insieme delle funzioni limitate da X in Y munito della distanza

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_1(f(x), g(x)) \ : \ x \in X\}$$

è uno spazio metrico, e si indica con $B(X, Y)$. Se inoltre Y è uno spazio normato con norma $\|\cdot\|_Y$, anche $B(X, Y)$ lo è, con norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_Y \ : \ x \in X\}.$$

L'insieme delle funzioni continue e limitate da X in Y munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico, e si indica con $C_b(X, Y)$ o anche con $BC(X, Y)$. Se Y è normato, anche $C_b(X, Y)$ lo è, per la norma $\|\cdot\|_\infty$.

6. Teorema *Se Y è completo allora $B(X, Y)$ e $C_b(X, Y)$ sono completi.*

DIM. Sia $f_n \in B(X, Y)$ una successione di Cauchy. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che $d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$ non appena $n, m > n_\epsilon$. Quindi per ogni x fissato si ha anche $d_1(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ (per la definizione di d_∞), ossia la successione $f_n(x)$ è di Cauchy in Y e converge ad un punto di Y che indichiamo con $f(x)$ (dipende dal punto x fissato, quindi è una funzione di x). Mostriamo ora che f_n converge a f in $B(X, Y)$. Facendo tendere $m \to \infty$ nella disuguaglianza $d_1(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$, e ricordando che $d_1(z, w)$ è continua in z fissato w [e viceversa: vedi Esempio 3.2] otteniamo $d_1(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ per ogni x non appena $n > n_\epsilon$, ossia $d_\infty(f_n, f) \leq \epsilon$. Da questa disuguaglianza segue che $f \in B(X, Y)$ e che $f_n \to f$ in $B(X, Y)$.

Passiamo alla completezza di $C_b(X, Y)$. Data f_n di Cauchy in C_b, essa converge ad una $f \in B(X, Y)$ per quanto già visto. Se dimostriamo che f è continua, abbiamo la tesi. Fissiamo $x_0 \in X$ ed $\epsilon > 0$; esiste n_ϵ tale che $d_\infty(f_n, f) < \epsilon$ per $n \geq n_\epsilon$; ma per la continuità di f_{n_ϵ} esiste anche $\delta > 0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ implica $d_1(f_{n_\epsilon}(x), f_{n_\epsilon}(x_0)) < \epsilon$; quindi, se $d(x, x_0) < \delta$, si ha

$$d_1(f(x), f(x_0)) \leq d_1(f(x), f_{n_\epsilon}(x)) + d_1(f_{n_\epsilon}(x), f_{n_\epsilon}(x_0)) + d_1(f_{n_\epsilon}(x_0), f(x_0))$$

$$< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

da cui segue che f è continua.

Introduciamo qui una terminologia che verrà utilizzata in seguito.

7. Definizione Una successione $f_n \in B(X,Y)$ si dirà *uniformemente convergente* se converge per la distanza d_∞. Si dirà invece *puntualmente convergente* se $f_n(x)$ converge in Y per ogni $x \in X$ fissato.

8. Corollario *Se una successione di funzioni continue e limitate da X in Y converge uniformemente ad una funzione f, allora f è continua e limitata.*

DIM. Conseguenza immediata del Teorema 6.

9. Esempio Dal Teorema 6 segue che gli spazi $B(X,\mathbb{R})$, $B(X,\mathbb{C})$ (spesso entrambi indicati con $B(X)$) sono di Banach. Lo stesso dicasi per $C_b(X) = C_b(X,\mathbb{R})$ o $C_b(X,\mathbb{C})$. In particolare, $B([a,b])$ e $C([a,b])$ (non si mette l'indice C_b perché le funzioni continue su $[a,b]$ sono tutte limitate) sono esempi fondamentali di spazi di Banach, con la consueta norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

ESERCIZI

1 Una successione convergente è di Cauchy. Una successione di Cauchy è limitata (ossia l'insieme $\{x_n : n \geq 1\}$ è limitato). Una successione convergente è limitata.

2 Verificare le affermazioni della Definizione 5 (ossia che d_∞ è una distanza e che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma).

3 Verificare che il Corollario 8 segue dal Teorema 6.

4 Una successione di funzioni convergente uniformemente converge anche puntualmente.

5 Dimostrare le affermazioni dell'Esempio 9.

6 Lo spazio dell'esercizio 1.5 è completo?

7 Una funzione uniformemente continua porta successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. E una funzione continua? [per la seconda domanda, considerare $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1/x$, distanze euclidee in partenza e in arrivo, e $x_n = 1/n$.]

---

01 Lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili su $[a,b]$ con derivata continua, munito della norma $\|\cdot\|_\infty$, è uno spazio normato ma non è di Banach.

02 Lo spazio $C^k([a,b])$ delle funzioni su $[a,b]$, derivabili k volte con derivate continue, munito della norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. [Studiare prima il caso $k = 1$.]

03 Sia ℓ^∞ lo spazio delle successioni $a = \{a_n\}$ di numeri reali limitate, dotato della norma $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$. Mostrare che ℓ^∞ è uno spazio di Banach.

04 Sia ℓ^1 lo spazio delle successioni $a = \{a_n\}$ di numeri reali tali che $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$, dotato della norma $\|a\|_1 = \sum_{n\geq 1} |a_n|$. Mostrare che ℓ^1 è uno spazio di Banach.

05 Sia $X =]0,1]$ e $d(x,y) = |1/x - 1/y|$. (X,d) è uno spazio metrico completo.

06 Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) spazi metrici completi. Mostrare che $X \times Y$ è uno spazio metrico completo con la distanza $d[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$. [v.es. 1.08]

07 Lo spazio X è completo se e solo se vale la seguente proprietà: data una successione di sfere $\{B_n\}$, con $B_{n+1} \subseteq B_n$ e con raggi tendenti a 0, l'intersezione $\bigcap \overline{B}_n$ è composta da un solo punto.

08 Sia X l'insieme di tutti gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, e poniamo $d([a,b],[c,d]) = |a-c|+|b-d|$). d è una distanza e X non è completo.

09 Su $\mathbb{R}$ sono distanze $d_1(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, $d_2(x,y) = |e^x - e^y|$, ma $\mathbb{R}$ non risulta completo in nessuno dei due casi.

010 Sia X l'insieme dei polinomi di una variabile su $[0,1]$. Mostrare che sono distanze su X: $d_1(P,Q) = \max_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)|$, $d_2(P,Q) = \int_0^1 |P(x) - Q(x)| dx$, ma X non è completo in nessuno dei due casi.

011 Sia X l'insieme delle funzioni reali continue e limitate su $]0,1[$, e sia $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Questa è una norma su X, ma X non è uno spazio di Banach. Cosa accade se sostituiamo $]0,1[$ con $[0,1]$?

1-5 TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X,d) uno spazio metrico.

1. Definizione Una funzione $F : X \to X$ si dice una *contrazione* se esiste $\alpha \in]0,1[$ tale che

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y).$$

2. Teorema *Una contrazione su uno spazio metrico completo ha uno ed un solo punto fisso (ossia un punto x tale che $F(x) = x$).*

DIM. Fissiamo arbitrariamente un punto $x_0 \in X$, e definiamo una successione per ricorrenza *iterando* la funzione F: $x_1 = F(x_0)$, ..., $x_{n+1} = F(x_n)$, ... Chiaramente

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0);$$

inoltre, per la disuguaglianza triangolare, presi $m > n$ si ha

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Da ciò segue che x_n è di Cauchy; sia $\xi \in X$ il suo limite. Poiché F è continua e $x_{n+1} = F(x_n)$, passando al limite si ha $\xi = F(\xi)$. L'unicità segue dal fatto che, se η fosse un secondo punto fisso, si avrebbe

$$d(\xi, \eta) = d(F(\xi), F(\eta)) \leq \alpha d(\xi, \eta)$$

da cui $d(\xi,\eta) = 0$ cioè $\xi = \eta$.

ESERCIZI

1 Una contrazione è una funzione uniformemente continua.

2 Dimostrare che, se $\alpha \neq 1$,

$$\sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha}.$$

3 Costruire una funzione F tale che $d(F(x), F(y)) \leq d(x,y)$ su uno spazio metrico completo senza punti fissi (quindi nel Teorema 2 è essenziale che sia $\alpha < 1$). [$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!]

4 Costruire una contrazione su uno spazio metrico non completo senza punti fissi.

5 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Per quali valori di a, b f è una contrazione?

---

01 Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$, e supponiamo che $|f'(x)|$ abbia massimo $M < +\infty$ su $\mathbb{R}$. Mostrare che f è una contrazione se $M < 1$, non è una contrazione se $M > 1$. Che si può dire se $M = 1$?

1-6 COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Siano (X, d), (Y, d_1) spazi metrici.

1. Definizione Sia $C \subseteq X$. Un *ricoprimento aperto* di C è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di aperti (I insieme qualunque) la cui unione contiene C. Un *sottoricoprimento (estratto da $\{A_i\}_{i\in I}$)* è una sottofamiglia $\{A_i\}_{i \in J}$, $J \subseteq I$, la cui unione contiene ancora C.

Un insieme C si dice *compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.

2. Definizione Un insieme $A \subseteq X$ si dice *compatto per successioni* se da ogni successione di punti di A si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di A.

Ricordiamo che data una successione x_n *estrarre una sottosuccessione* vuol dire considerare una nuova successione $x_{\phi(k)}$, dove $\phi(k)$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ strettamente crescente.

È importante notare nella Definizione 2 che la sottosuccessione deve essere non solo convergente, ma convergente ad un punto di A (vedi esercizio 6.2).

Notiamo che un chiuso contenuto in un compatto è necessariamente un compatto; la stessa proprietà vale per la compattezza per successioni.

Le due definizioni precedenti si possono dare in qualunque spazio topologico (e in genere sono indipendenti, ossia esistono compatti che non sono compatti per successioni e viceversa); ma in uno spazio metrico coincidono.

3. Teorema *In uno spazio metrico, un insieme è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

DIM. Omessa. Vedi gli esercizi 6.05,...,6.07.

Pertanto, nel seguito parleremo semplicemente di insiemi compatti, facendo uso delle proprietà delle Definizioni 1 o 2 come risulterà più comodo.

Il teorema di Heine-Borel, dimostrato in Analisi I, si può enunciare dicendo che gli intervalli chiusi e limitati della retta reale sono compatti. In generale, si ha la seguente caratterizzazione.

4. Teorema *Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

DIM. $\Leftarrow$: Sia K un chiuso limitato di $\mathbb{R}^n$. Essendo contenuto in una palla, sarà anche contenuto in un cubo $[-M, M]^n$ se prendiamo M abbastanza grande. Sia ora $x^k = ({x^k}_1, \ldots, x^k_n)$ una successione in K. La prima componente x_1^k è una successione in $[-M, M]$, quindi per Heine-Borel si può estrarre una sottosuccessione convergente. Quindi possiamo estrarre da x^k una successione tale che la prima componente converga. Ripetiamo il procedimento sulla successione così ottenuta, operando sulla seconda componente. Dopo n passi avremo una sottosuccessione di x^k tale che tutte le sue componenti convergono, cioé una sottosuccessione convergente. Ma K è chiuso, quindi essa converge ad un punto di K.

$\Rightarrow$: Sia K compatto. Dato un punto aderente a K, esiste una successione di K convergente ad esso; ma è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in K, quindi il punto in questione appartiene a K, ossia K è chiuso. Se poi K non fosse limitato, esisterebbe una successione di punti di K la cui distanza dall'origine tende all'infinito; ma da una tale successione non si possono estrarre sottosuccessioni convergenti.

In particolare, i compatti di $\mathbb{R}$ essendo chiusi e limitati ammettono un massimo e un minimo.

Gli insiemi compatti godono di importanti proprietà.

5. Teorema *Se $f : X \to Y$ è continua e $K \subseteq X$ è compatto, allora $f(K)$ è compatto.*

DIM. Prendiamo una successione di punti y_n in $f(K)$; scegliamo per ogni n un punto $x_n \in f^{-1}(y_n)$; estraiamo una successione convergente $x_{\phi(k)} \to \xi \in K$; per la continuità di f, $y_{\phi(k)} = f(x_{\phi(k)}) \to f(\xi)$ che è un punto di $f(K)$.

6. Corollario *(Teorema di Weierstraß) Se $K \subseteq X$ è compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, f ammette massimo e minimo su K.*

DIM. Dire che f ammette massimo e minimo vuol dire che la sua immagine $f(K)$ ammette massimo e minimo, e ciò segue da quanto detto sopra.

7. Teorema *Uno spazio metrico compatto è completo.*

DIM. Sia x_n una successione di Cauchy; estraiamo una successione convergente $x_{\phi(k)} \to \xi$. Facciamo vedere che tutta la successione x_n converge a ξ: si ha

$$d(\xi, x_n) \leq d(\xi, x_{\phi(k)}) + d(x_{\phi(k)}, x_n);$$

fissato $\epsilon > 0$, se n e $\phi(k)$ sono maggiori di un n_ϵ opportuno il secondo addendo è minore di ϵ (perché la successione è di Cauchy). Quindi prendendo k, n abbastanza grandi entrambi gli addendi diventano minori di ϵ (il primo perché la sottosuccessione converge) e otteniamo, per $n \geq n_\epsilon$,

$$d(\xi, x_n) < 2\epsilon.$$

La seguente proprietà degli insiemi compatti sarà utile varie volte nel seguito. Dato un sottoinsieme K di uno spazio metrico, il suo *diametro* è il numero (finito o infinito)

$$d(K) = \sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in K\}.$$

8. Proposizione *Sia X uno spazio metrico, $K \subseteq X$ compatto, $\{A_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di K. Allora esiste un numero $\epsilon > 0$ tale che ogni sottoinsieme $K' \subseteq K$ di diametro minore di ϵ è contenuto in qualcuno degli A_α.*

DIM. Se per assurdo la tesi non fosse vera, allora presa una successione $\epsilon_j \downarrow 0$, potremmo trovare una successione K_j di sottoinsiemi di K con $d(K_j) < \epsilon_j$, tali che ogni K_j non è contenuto in nessuno degli A_α. Se ora scegliamo per ogni j un punto $x_j \in K_j$, la successione $\{x_j\} \subseteq K$ avrà una sottosuccessione convergente, che per comodità indichiamo ancora con x_j; sia $\xi \in K$ il suo punto limite. ξ deve appartenere a qualche A_α, e quindi sarà $B(\xi, r) \subseteq A_\alpha$ per qualche A_α e qualche $r > 0$; ma allora è facile vedere che a partire da un certo indice j in poi si deve avere $K_j \subseteq A_\alpha$. Infatti da un certo j_0 in poi si ha $x_j \in B(\xi, r/2)$, e da un certo j_1 in poi si ha $\epsilon_j < r/2$; quindi per $j \geq j_0 \vee j_1$ e per ogni $y \in K_j$ si ha

$$d(y, \xi) \leq d(y, x_j) + d(x_j, \xi) \leq \epsilon_j + r/2 < r$$

ossia $y \in B(\xi, r)$. Questo è assurdo per costruzione dei K_j.

ESERCIZI

1 Dimostrare che i compatti di $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo.

2 Mostrare con un controesempio che in un generico spazio metrico, anche completo, esistono insiemi chiusi e limitati che non sono compatti. [$X = B([0,1])$; l'insieme C di tutte le funzioni f con $|f| \leq 1$ (ossia la palla unitaria in X) non è compatto, ad esempio da $f_n = \mathbf{1}_{]0,1/n[}$ non si possono estrarre sottosuccessioni convergenti.]

3 Un insieme $A \subseteq X$ si dice *precompatto* se $\overline{A}$ è compatto. Dimostrare che A è precompatto se e solo se da ogni successione di punti di A si può estrarre una sottosuccessione convergente (ad un punto di X).

4 Compatti e precompatti sono insiemi limitati.

5 Utilizzando il Teorema di Weierstraß sui massimi e minimi di funzioni continue, dimostrare che tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.

6 Sia X uno spazio metrico compatto, e $F : X \to X$ tale che $d(F(x), F(x')) < d(x, x')$. Allora esiste uno e un solo putno fisso per F su X.

---

01 Una funzione continua su uno spazio metrico compatto è uniformemente continua. [Si procede per assurdo esattamente come nel caso di funzioni di variabile reale.]

02 Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, f_n una successione di funzioni reali continue su X convergente puntualmente ad una funzione f e tale che, per ogni x fissato, $f_n(x)$ è crescente. Allora f_n converge uniformemente a f (teorema del Dini).

03 La palla unitaria $B(0, 1)$ di ℓ^∞ (vedi es. 4.03) non è un compatto.

04 Sia A compatto di X, e $x \in X$ qualunque. Allora esiste un punto $y_0 \in A$ di minima distanza da x, ossia un punto $y_0 \in A$ tale che $d(x, y_0) = d(x, A)$ (vedi definizione nell'es. 2.07).

05 Sia K sottoinsieme compatto di X metrico. Allora K è compatto per successioni. [Sia x_n una successione in K. Se per assurdo essa non ha sottosuccessioni convergenti in K, per ogni $y \in K$ esiste una palla I_y centrata in y che contiene al più un numero finito di elementi della successione. Ma gli I_y formano un ricoprimento aperto di K, ed estraendone un sottoricoprimento finito si arriva all'assurdo che la successione ha solo un numero finito di termini.]

06 Sia K compatto per successioni in X metrico. Allora da ogni ricoprimento aperto di K si può estrarre un sottoricoprimento numerabile. [Anzitutto, per ogni $\epsilon > 0$ possiamo ricoprire K con un numero finito di sfere di raggio ϵ; infatti, se così non fosse, fissato $x_1 \in K$, potremmo trovare $x_2 \in K$ con $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$, $x_3 \in K$ distante più di ϵ dai precedenti, $\ldots$, $x_n \in K$ distante più di ϵ da $x_1, \ldots, x_{n-1}$; da tale successione non si possono estrarre sottosuccessioni convergenti, contro l'ipotesi. Adesso: ricopriamo K con un numero finito di sfere di raggio 1; poi con un numero finito di sfere di raggio 1/2; poi 1/3, e così via. Tali sfere formano una successione $\{S_n\}$. Infine, sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di K. Preso un qualunque $x \in K$, dovrà essere $x \in A_i$ per qualche i, quindi $B(x, r) \subseteq A_i$ per un certo $r > 0$; ma d'altra parte x sta in una delle sfere S_n con raggio minore di $r/2$, quindi $x \in S_n \subseteq B(x, r) \subseteq A_i$. Vediamo quindi che la sottofamiglia di tutte le sfere incluse in qualcuno degli aperti A_i è ancora un ricoprimento di K, ed è ovviamente numerabile, quindi scegliendo per ognuna di tali sfere un aperto A_i che la contiene, otteniamo il sottoricoprimento numerabile richiesto.]

07 Sia K compatto per successioni in X metrico. Allora K è compatto. [Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di K. Per l'esercizio precedente possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile A_{i_k}. Adesso, mostriamo che per un opportuno indice n gli aperti $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ ricoprono K. Infatti, se così non fosse, potremmo trovare per ogni n un punto x_n di K che non appartiene ad A_{i_j} per $j = 1, \dots, n$; estraiamo da x_n una sottosuccessione convergente a $\xi \in K$; quindi ξ apparterrà a qualche A_{i_r}; ma allora la sottosuccessione cade definitivamente in A_{i_r}, contro la costruzione fatta.]

08 Sia X metrico completo, $A \subseteq X$. A è precompatto (es. 6.3) se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ si può ricoprire A con un numero finito di sfere di raggio ϵ.

09 (Teorema del grafico chiuso su $\mathbb{R}$) Il *grafico* di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ $G = \{(x, y) : x \in [a, b],\ y = f(x)\}$. Se f è continua allora il suo grafico è un chiuso. Se il grafico di f è chiuso e f è limitata allora f è continua. [Sia f continua; prendiamo $\{(x_n, y_n)\}$ successione di punti di G convergente ad un punto (ξ, η); dobbiamo mostrare che $(\xi, \eta) \in G$. Dato che la successione è in G si ha $y_n = f(x_n)$; ora per ipotesi $y_n = f(x_n) \to \eta$, e per continuità $y_n = f(x_n) \to f(\xi)$; quindi $\eta = f(\xi)$ cioè $(\xi, \eta) \in G$. Viceversa, sia f limitata e G chiuso, fissiamo $\xi \in [a, b]$ e dimostraimo che f è continua in ξ. Prendiamo $x_n \to \xi$, la tesi è che $f(x_n) \to f(\xi)$. Essendo $\{f(x_n)\}$ una successione limitata, avrà una sottosuccessione $\{f_{\phi(n)}\}$ convergente al $\limsup f(x_n) = \eta$; quindi $(x_{\phi(n)}, f(x_{\phi(n)}))$ è una successione in G convergente, ed essendo G chiuso essa deve convergere ad un punto di G; ne segue $\eta = f(\xi)$ ossia $f(x_{\phi(n)}) \to f(\xi)$. Allo stesso modo, se $\eta' = \liminf f(x_n)$, si ha $\eta' = f(\xi)$. Quindi $f(x_n)$ converge a $f(\xi)$.]

1-7 CONNESSIONE

1. Definizione Uno spazio metrico si dice *sconnesso* se è unione di due aperti disgiunti non vuoti; si dice *connesso* se non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.

Definizione equivalente: uno spazio metrico è connesso se non è unione di due chiusi disgiunti non vuoti.

Definizione equivalente: uno spazio metrico è connesso se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e tutto lo spazio.

Cerchiamo di capire questa strana definizione. Ovviamente, se uno spazio X contiene almeno due punti, possiamo sempre spezzarlo in due parti disgiunte non vuote. Ma nella definizione richiediamo che le due parti siano due insiemi aperti, e questo non sempre è possibile: dipende dalla topologia. Lo spazio è connesso se non è possibile spezzarlo in due parti entrambe aperte (o entrambe chiuse, il che è lo stesso): non è possibile "strappare in due" la topologia dello spazio.

La definizione nel caso di sottoinsiemi è esattamente la stessa, ma bisogna capire bene in che senso. Se X è uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto, anche A è uno spazio metrico per la metrica indotta (ossia la restrizione ad A della metrica di X). Gli aperti di A sono semplicemente le intersezioni degli aperti di X con l'insieme A: questa si chiama la *topologia indotta* su A da quella di X. Naturalmente i chiusi di A sono proprio le intersezioni dei chiusi di X con l'insieme A. Allora la definizione più generale è la seguente:

2. Definizione Sia X uno spazio metrico e A un suo sottoinsieme non vuoto. A si dice *connesso* se è connesso per la topologia indotta, ossia se non è unione di due aperti disgiunti non vuoti di A. Analoga la definizione di sconnesso.

3. Esempio Consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Quali sono i sottoinsiemi connessi $A \subseteq \mathbb{R}$? Per rispondere basta l'osservazione seguente: siano $x < y < z$ tre punti di $\mathbb{R}$; se A contiene x e z allora deve contenere per forza anche y, altrimenti potrei scrivere A come l'unione dei due aperti $A \cap (y, +\infty)$ e $A \cap (-\infty, y)$, e A sarebbe sconnesso. Ossia, se A contiene due punti x, z allora contiene anche l'intervallo $[x, z]$. Capite qual è la conseguenza? un sottoinsieme connesso A di $\mathbb{R}$ è necessariamente un intervallo (aperto, chiuso, semiaperto, finito o infinito non fa differenza).

Vale anche il viceversa: un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme connesso. Infatti, supponiamo per assurdo che I si scriva come unione di due insiemi disgiunti, non vuoti e chiusi per la topologia indotta; allora possiamo prendere due punti $a < b$ appartenenti rispettivamente al primo e secondo insieme e anche l'intervallo $[a, b]$ si può scrivere come $[a, b] = A \cup B$, con A, B non vuoti, disgiunti e chiusi per la topologia indotta; si noti che A, B sono insiemi chiusi anche per $\mathbb{R}$. Sia $c = \sup A$; dato che A è chiuso, si ha $c \in A$; d'altra parte, $c \neq b$ perché $b \in B$, quindi $c < b$; ma allora l'intervallo $(c, b]$ è tutto contenuto in B ed essendo B chiuso abbiamo $c \in B$, il che è assurdo.

Riassumendo, gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli. Questo fatto si può sintetizzare dicendo che *su* $\mathbb{R}$*, basta togliere un punto per sconnettere un insieme* (naturalmente a meno che questo punto non sia il sup o l'inf dell'insieme).

Le funzioni continue *portano insiemi connessi in insiemi connessi:*

4. Proposizione *Siano X, Y due spazi metrici, $A \subseteq X$, e $f : A \to Y$ una funzione continua. Se A è un connesso, anche $f(A)$ è un connesso.*

DIM. È la stessa cosa dimostrare l'implicazione inversa: se $f(A)$ è sconnesso allora A è sconnesso. Supponiamo allora $f(A)$ sconnesso; quindi possiamo scriverlo come unione $f(A) = B_1 \cup B_2$ di due aperti non vuoti disgiunti B_1 e B_2. Ma allora $A = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ è anch'esso unione di due aperti non vuoti disgiunti ossia sconnesso.

5. Osservazione Abbiamo già visto all'opera questa proprietà delle funzioni continue in passato! Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, per quanto appena visto sappiamo che la sua immagine $f([a, b])$ deve essere un connesso di $\mathbb{R}$, e cioè un intervallo. Allora l'insieme $f([a, b])$ deve contenere tutti i valori intermedi fra $f(a)$ e $f(b)$; e in particolare, nel caso che $f(a) < 0 < f(b)$, deve contenere lo 0. Riconoscete il teorema dei valori intermedi e il teorema degli zeri?

Ovviamente vale il risultato molto più generale che se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua e A è connesso allora la sua immagine è un intervallo (e in particolare $f(A)$ contiene l'intervallo aperto di estremi $\inf_A f$ e $\sup_A f$).

Su $\mathbb{R}^2$, e in genere su $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, la situazione è molto più complicata. Non esiste una caratterizzazione elementare degli insiemi connessi come su $\mathbb{R}$; diciamo che il concetto corrisponde abbastanza bene alla nostra idea di "insieme fatto di un solo pezzo", anche se naturalmente con insiemi molto complicati la nostra intuizione si annebbia un po'. Notiamo che togliere un punto non è più sufficiente in generale a sconnettere un insieme: per esempio, il "piano bucato" $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è un insieme connesso.

È molto utile dare un nome ai "pezzi" da cui è un composto un insieme. Il modo più semplice per caratterizzarli è dire che sono dei sottoinsiemi connessi *massimali*, ossia se aggiungiamo altri punti gli insiemi che otteniamo non sono più connessi:

6. Definizione Sia X uno spazio metrico e $A \subseteq X$ non vuoto. Una *componente connessa* di A è un sottoinsieme connesso di A, che non è strettamente contenuto in un altro sottoinsieme connesso.

Ovviamente, un insieme connesso ha una sola componente connessa, che coincide con tutto l'insieme.

Per semplificarci la vita, introduciamo ora un concetto più forte di connessione che è molto più facile da controllare in dimensione ≥ 2.

7. Definizione Un *arco* (o *curva continua*) in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, da un qualunque intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Si dice di solito che l'arco ϕ *va dal punto* $\phi(a)$ *al punto* $\phi(b)$, o che *unisce i due punti* $\phi(a)$ e $\phi(b)$, che sono detti il *primo* e il *secondo estremo* dell'arco.

Se $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ sono due archi con la proprietà $\phi(b) = \psi(c)$, la loro *unione* è l'arco $\psi + \phi : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^n$ definito come $\psi + \phi(t) = \phi(t)$ se $a \leq t \leq b$, $\psi + \phi(t) = \psi(b + t - c)$ se $b \leq t \leq b + d - c$. L'arco $\psi + \phi$ naturalmente non è nient'altro che l'arco ottenuto percorrendo prima ϕ e poi ψ.

8. Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti di A esiste un arco a valori in A che li unisce.

Se un insieme A è connesso per archi allora deve essere per forza anche connesso. Infatti, se per assurdo A non fosse connesso potremmo spezzarlo $A = B_1 \cup B_2$ con B_1, B_2 aperti non vuoti disgiunti; ma allora preso un arco $\phi : [a, b] \to A$ che unisce un punto di B_1 con un punto di B_2 avremmo che l'insieme connesso $C = \phi([a, b])$ (l'immagine di ϕ) si può scrivere come unione dei due aperti non vuoti disgiunti $C \cap B_1$ e $C \cap B_2$, e questo è impossibile.

C'è però un caso molto importante in cui le due nozioni coincidono:

9. Proposizione *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. A è connesso per archi se e solo se è connesso.*

DIM. Ci resta solo da dimostrare che se A è connesso, allora è anche connesso per archi. Osservazione preliminare: se B è una palla di $\mathbb{R}^n$ di centro x, ovviamente ogni punto $y \in B$ può essere unito al centro x con un arco che sta tutto dentro B: basta prendere il raggio da x a y.

Fissiamo adesso un punto $p \in A$, e definiamo A_p come l'insieme di tutti i punti di A che possono essere uniti a p con un arco a valori in A. Se $A_p = A$ abbiamo finito, perché tutti i punti possono essere uniti a p e quindi fra loro. Dimostriamo che se A_p non fosse uguale A, si avrebbe un assurdo.

Prendiamo un qualunque punto $x \in A_p$ e una palla B di centro x contenuta in A; allora abbiamo anche $B \subseteq A_p$ perché per unire un qualunque punto $y \in B$ a p basta prendere l'unione dell'arco da p a x con il raggio da x a y. Abbiamo così dimostrato che l'insieme A_p è aperto.

Prendiamo ora un qualunque punto $x \in A \setminus A_p$ e una palla B di centro x contenuta in A: vediamo che nessun punto $y \in B$ può essere unito a p, altrimenti anche x potrebbe essere unito a p (basta andare prima da p

a y e poi da y a x lungo un raggio). Questo vuol dire che $B \subseteq A \setminus A_p$, ossia anche $A \setminus A_p$ è aperto, e questo è assurdo

10. Osservazione Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, le sue componenti connesse sono tutti insiemi aperti. Infatti, sia A_1 una componente connessa e $x \in A_1$; dato che A è aperto, esiste una palla aperta $B \subseteq A$ contenente x; l'unione $A_1 \cup B$ è ancora un connesso e quindi deve essere $B \subseteq A_1$.

ESERCIZI

1 Mostrare con dei controesempi che in generalre unioni e intersezioni di insiemi connessi possono non essere connesse.

2 Se due insiemi connessi hanno intersezione non vuota, allora la loro unione è un conesso.

3 Dimostrare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, allora l'immagine di f contiene l'intervallo aperto di estremi $\inf_X f$ e $\sup_X f$.

4 Dimsotrare che se X è connesso, $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, e per due punti $x, y \in X$ si ha $f(x) \cdot f(y) < 0$, allora esiste $z \in X$ tale che $f(z) = 0$.

---

01 Consideriamo il sottoinsieme C di $\mathbb{R}^2$ definito come segue. C è l'insieme delle coppie $(x, \sin(1/x))$ per tutti gli $x > 0$ (ossia il grafico della funzione $\sin(1/x)$). Dimostrare che C è connesso per archi. Dimostrare che $\overline{C}$ è C unito al segmento $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$. Dimostrare che $\overline{C}$ è connesso ma non connesso per archi.

1-8 SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Richiamiamo qui due concetti già noti: la convergenza uniforme, ossia nella distanza d_∞ di $B(A)$ (A insieme), e la convergenza puntuale.

1. Definizione Sia A un insieme qualunque, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e siano $f_n, f : A \to \mathbb{K}$. Diremo che f_n *converge puntualmente su* A ad f se per ogni x fissato $f_n(x) \to f(x)$; l'*insieme di convergenza puntuale* di $\{f_n\}$ è l'insieme di tutti gli $x \in A$ tali che $\{f_n(x)\}$ converge. Diremo che $\{f_n\}$ *converge uniformemente su* A ad f se $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ tende a 0 per $n \to \infty$. In entrambi i casi si scrive $f_n \to f$, precisando poi il tipo di convergenza.

Notiamo che non c'è bisogno di distinguere tra funzioni a valori reali o complessi, basta interpretare $|\cdot|$ nella maniera opportuna (modulo di reali o complessi).

Nel seguito l'insieme A sarà sempre un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e spesso un intervallo I che può essere aperto, chiuso, semiaperto, e limitato o non limitato.

2. Proposizione *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e f_n, f, g funzioni su I a valori reali o complessi. Allora*
(a) Se $f_n \to f$ uniformemente su I, allora converge anche puntualmente (su I);
(b) Se $f_n \to f$ uniformemente su I e le f_n sono continue, anche f lo è;
(c) (Passaggio al limite sotto integrale) Se le f_n sono continue e $f_n \to f$ uniformemente, allora $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$ per $a, b \in I$ fissati;

(d) (Passaggio al limite sotto derivata) Se $f_n \in C^1$, $f_n \to f$ puntualmente su I e $f_n' \to g$ uniformemente su I, allora f è C^1 e $f' = g$.

DIM. (a) segue subito dalle definizioni. (b) è il Corollario 4.8. (c) segue dalla maggiorazione $|\int_a^b g(x)dx| \leq (b-a)\|g\|_\infty$, applicata a $g = f_n - f$. (d) segue da (c) applicata all'identità $\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$, valida per ogni $x \in [a,b]$.

3. Osservazione È chiaro che:

le proprietà (a) e (b) valgono più in generale per successioni di funzioni definite su un qualunque sottoinsieme di uno spazio metrico (e non solo sugli intervalli);

se f_n non converge puntualmente su un insieme, non converge neanche uniformemente su quell'insieme;

un insieme su cui si ha convergenza uniforme *deve* essere un sottoinsieme dell'insieme di convergenza puntuale (e la funzione limite è la stessa);

se $f_n \to f$ puntualmente su un intervallo, le f_n sono continue ma la f è discontinua, allora non è possibile che la convergenza sia uniforme;

se $f_n \to f$ uniformemente su A, allora $f_n \to f$ uniformemente su B per ogni sottoinsieme B di A;

se $f_n \to f$ uniformemente su A e le f_n sono continue, allora $f_n \to f$ uniformemente anche su $\overline{A}$ [infatti il sup di $f_n - f$ su A o su $\overline{A}$ è lo stesso dato che f_n, f sono continue].

4. Esempio 1) $f_n(x) = \frac{1}{n}x$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza puntuale è tutto l'intervallo $[0,1]$, la funzione limite f è la funzione nulla; inoltre f_n converge uniformemente a 0 su $[0,1]$ in quanto

$$\|f_n - f\|_\infty \equiv \frac{1}{n} \to 0.$$

2) $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza puntuale è tutto $[0,1]$, in quanto $f_n(x)$ converge a 0 se $0 \leq x < 1$, e ad 1 se $x = 1$. Il limite puntuale è quindi la funzione discontinua $f(x)$ che vale zero dappertutto tranne in $x = 1$ dove vale 1. Inoltre f_n non converge uniformemente ad f su $[0,1]$, in quanto $\|f - f_n\|_\infty = 1$ per ogni n.

3) $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza puntuale è tutto $[0,1]$, e si verifica facilmente che $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$, qualunque sia il valore del parametro p. Quindi la funzione limite f è la funzione nulla. Per vedere se f_n converge uniformemente ad $f \equiv 0$ su $[0,1]$, dobbiamo determinare se va a zero la quantità $\|f_n - f\|_\infty \equiv \|f_n\|_\infty$, ossia il massimo di f_n su $[0,1]$. Si ha

$$f_n'(x) = n^p e^{-nx}(1 - nx)$$

che si annulla soltanto in $x = 1/n$; inoltre $f_n(1/n) = n^{p-1}e^{-1}$ è il valore massimo della funzione f_n su $[0,1]$ come si verifica facilmente confrontando con i valori agli estremi. Evidentemente tale massimo tende a zero se e solo se $p < 1$, e lo stesso dicasi per la convergenza uniforme di f_n a zero.

4) La successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2}$$

converge a zero puntualmente su tutto $\mathbb{R}$. Ma è semplice verificare che $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ per ogni n, in quanto f_n è semplicemente la funzione $1/(1+x^2)$ traslata di n. Quindi la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$. Vediamo invece che su un intervallo limitato $[a,b]$ la successione f_n converge uniformemente a 0. In questo caso, prendendo il sup su $[a,b]$ per n abbastanza grande abbiamo

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{1+(b-n)^2} \to 0.$$

5) $f_n(x) = \sin(nx)$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. La successione converge puntualmente (e uniformemente) solo sull'insieme $\{0\}$.

6) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Si ha convergenza puntuale su $[0,1]$ al limite $f(x)$ che vale 1 dappertutto tranne che in 0, dove vale 0. La convergenza non può essere uniforme, in quanto il limite non è continuo mentre le f_n lo sono.

7) $f_n(x) = (1-x)x^n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Per tutti gli $x \in [0,1]$ la successione $f_n(x) \to 0$, quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[0,1]$ e il limite f è la funzione nulla. Inoltre, su $[0,1]$ f_n ha massimo in $x = n/(n+1)$, come si verifica facilmente, e vale

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Quindi f_n converge uniformemente a zero su $[0,1]$.

8) $f_n(x) = (\sin x)^n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f_n converge puntualmente per tutti gli x tali che $\sin x \neq -1$, cioè per $x \neq 2k\pi + 3\pi/2$. Il limite è la funzione discontinua che vale zero tranne nei punti $x = 2k\pi + \pi/2$ dove vale 1. La convergenza non è uniforme.

ESERCIZI

1 Dimostrare la Proposizione 2.

2 Per le seguenti successioni di funzioni reali a valori reali, si chiede di determinare l'insieme di convergenza puntuale e gli *intervalli* ($[a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[, [a,+\infty[,]a,+\infty[,]-\infty,b],]-\infty,b[, \mathbb{R}$) dove si ha convergenza uniforme. Quando non è precisato altrimenti, le successioni vanno studiate su tutto $\mathbb{R}$, altrimenti solo per x appartenente all'insieme assegnato.

$$f_n = \frac{1}{x+n} \text{ su } [0,+\infty[, \quad f_n = \frac{n}{n+x} \text{ su } [0,+\infty[,$$
$$f_n = x^n + (-x)^n, \quad f_n(x) = \log_n x \text{ su } [0,+\infty[, \quad f_n = \exp[(x-x^2)n],$$
$$f_n = \frac{\sqrt{n}}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ su }]0,\pi[,$$
$$f_n = xne^{-nx} + (\cos x)^n, \quad f_n = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n^2} + \frac{x^3}{n^3},$$
$$f_n = \frac{1}{n}\exp[\sin(nx)], \quad f_n = \frac{x}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\sin^2\left(\frac{x}{n}\right),$$
$$f_n = \frac{x}{n} - \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad f_n = (\log x)^n \cdot \log(x^n) \text{ su }]0,+\infty[,$$
$$f_n = \frac{2+(\sin x)^n}{2+\sin(x^n)}, \quad f_n = n\left[\sin\left(\frac{x}{n-1}\right) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)\right],$$
$$f_n = \exp\sqrt{\log(x/n)} \text{ su }]0,+\infty[, \quad f_n = \sqrt{n}\log(1+e^{x/n}),$$
$$f_n = (-1)^n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \text{ su } \mathbb{R}\setminus 0, \quad f_n = \frac{1}{4^n}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n \text{ su } \mathbb{R}\setminus 0,$$
$$f_n = n\sin\frac{x}{n^2}, \quad f_n = \sin^n x + x^n,$$

$$f_n = n^{\sin x}, \quad f_n = \frac{x^n}{x^n + (1+x)^{2n}} \text{ su } [0, +\infty[,$$
$$f_n = x^{\sqrt{n}-1} \text{ su } [0, +\infty[, \quad f_n = x^{\sqrt{n}-n} \text{ su } [0, +\infty[,$$
$$f_n = n^{-(x^n)}, \quad f_n = \frac{1}{n^x}, \quad f_n = \frac{1}{n}[nx].$$

3 Sia f_n una successione di funzioni continue su $[0,1]$, convergente uniformemente su $[0,1]$ a f, e sia $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Mostrare che $F_n \to F$ uniformemente su $[0,1]$.

---

01 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Studiare la successione di funzioni $f_n(x) = [\phi(x)]^n$.

02 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limitata, e sia $f_n(x) = \phi(nx)$. Mostrare che se $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$, allora ϕ è identicamente nulla. Che si può dire invece se si sa solo che $f_n \to 0$ uniformemente su $[0,1]$?

Piero D'Ancona: Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma, Italy

E-mail address: `dancona@mat.uniroma1.it`