Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 1

☺ – **1)** Calcolare le seguenti distanze e norme:
(i) $d_\infty(x,y)$ dove $x = \{x_j\}$ e $y = \{y_j\}$ sono le successioni di ℓ^∞ definite da $x_j = (-1)^j$, $y_j = j/(j+1)$;
(ii) $d_\infty(f,g)$ dove f, g sono le funzioni di $C^0([-1,1];\mathbb{R})$ date da $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$;
(iii) $d_p(f,0)$ dove f è la funzione di $C^0([0,1];\mathbb{R})$ data da $f(x) = x^\alpha$ (dove α è un numero reale positivo fissato).

☺☹ – **2)** In quali dei seguenti casi la coppia (X,d) è uno spazio metrico?
(i) X è l'insieme delle caselle di una scacchiera 8×8, $d(x,y)$ è il numero minimo di salti che un cavallo (degli scacchi...) deve fare per passare dalla casella x a quella y.
(ii) X è l'insieme degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, e $d(I_1, I_2) = |I_1| + |I_2| - 2|I_1 \cap I_2|$, dove $|I|$ indica la lunghezza dell'intervallo. (☹) Se è uno spazio metrico, è completo?
(iii) X è l'insieme di tutti i polinomi di una variabile, e $d(P,Q)$ è data dalla somma dei moduli dei coefficienti di $P - Q$.

☺ – **3)** Sia (X,d) uno spazio metrico. Allora per tutti i punti x, y, z vale la disuguaglianza

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Dedurne che, per ogni $y \in X$ fissato, l'applicazione $x \mapsto d(x,y)$ è continua da X in $\mathbb{R}$.

☹ – **4)** Sia (X,d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ un punto fissato, e per ogni $x \in X$ definiamo una funzione ϕ_x da X a valori in $\mathbb{R}$ come

$$\phi_x(y) = d(x_0, y) - d(x,y).$$

Dimostrare i fatti seguenti.
(i) Per qualunque x, la funzione ϕ_x è continua e limitata, ossia ϕ_x è un elemento dello spazio metrico completo $Y = C_\ell(X, \mathbb{R})$. (Suggerimento: usare l'esercizio 3).
(ii) Abbiamo dunque definito un'applicazione $i : X \to Y$ che al punto $x \in X$ associa la funzione $\phi_x \in Y$ con la metrica d_∞. Dimostrare che i è un'isometria (conserva le distanze).
(iii) Dedurne che ogni spazio metrico ammette un unico completamento a meno di isometrie.

☺ – **5)** Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quali condizioni si devono mettere su φ affinché $d_1(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ e $d_2(x,y) = \varphi(|x-y|)$ siano due distanze su $\mathbb{R}$?

☹ – **6)** Sia (X,d) uno spazio metrico. Dimostrare che

$$\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}\,,$$

è una distanza su X.

☹ – **7)** Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y \geq 0\}$, e sia $d(P,Q) = d_2(P,Q)$ se P e Q sono nello stesso quadrante, e $d(P,Q) = d_2(P,0) + d_2(0,Q)$ se sono in quadranti diversi. Dimostrare che d è una distanza, e determinare $B_2((1,0))$.

☺ – **8)** Sia $E = \ell^2$, e

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n)\,.$$

Dimostrare che d è ben definita ma non è una distanza.

☹ – **9)** Dimostrare che è una contrazione su $(C^0([0,1];\mathbb{R}), d_\infty)$ la funzione

$$F : C^0([0,1];\mathbb{R}) \to C^0([0,1];\mathbb{R})$$

$$f(x) \to F(f(x)) = 1 + \int_0^x y f(y)\,dy \ , x \in [0,1]$$

Trovare poi un punto fisso di F (suggerimento: derivando...).

☹ – **10)** Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è una contrazione su $(C^0([0,1];\mathbb{R}), d_\infty)$ la funzione

$$F : C^0([0,1];\mathbb{R}) \to C^0([0,1];\mathbb{R})$$

$$f(x) \to F(f(x)) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y)\,dy \ , x \in [0,1]?$$