

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 2

☺ – 1) Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{(\sin x)^2 + 2(\sin y)^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{in } (0, 0) \end{cases}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale fissato. Determinare l'insieme di definizione di f . Inoltre determinare per quali valori di α la funzione è continua in 0, per quali valori è derivabile in 0, per quali valori è differenziabile in 0.

☺ – 2) (i) Siano $f, \phi, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni, supponiamo che f e g siano differenziabili nell'origine 0 con $f(0) = g(0)$, e che si abbia $f(x, y) \leq \phi(x, y) \leq g(x, y)$ per tutti gli (x, y) . Dimostrare che allora anche ϕ è differenziabile in 0 e che $df(0) = d\phi(0) = dg(0)$.

(ii) Siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, f differenziabile nel punto 0 con $f(0) = 0$, g soltanto continua. Dimostrare che il prodotto $f(x)g(x)$ è differenziabile in 0 e $d(fg)(0) = g(0)df(0)$.

☺ – 3) Siano $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Possiamo allora definire una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dimostrare che se esiste il limite in $z_0 = x_0 + iy_0$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

allora le due funzioni sono derivabili nel punto (x_0, y_0) e devono valere le relazioni di Cauchy-Riemann nel punto (x_0, y_0) , ossia

$$D_1 u(x_0, y_0) = D_2 v(x_0, y_0), \quad D_2 u(x_0, y_0) = -D_1 v(x_0, y_0).$$

☺ – 4) Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *positivamente omogenea* di grado α se per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e per ogni $t > 0$ si ha $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Dimostrare il Teorema di Eulero: sia f differenziabile, allora f è positivamente omogenea di grado α se e solo se $x \cdot Df(x) = \alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$.

☺ – 5) Determinare, se esiste, a in $\mathbb{R}$ tale che sia continua su $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y - \sin(x))}{e^{y - \sin(x)} - 1} & \text{se } y > \sin(x) \\ a & \text{se } y \leq \sin(x) \end{cases}$$

☺ – 6) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{se } y \geq x^3 \end{cases}$$

☺☺ – 7) Dimostrare che sono definite e differenziabili su $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad g(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt.$$

☺ – 8) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^3$ di

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta |z|^\gamma}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

☺☺ – 9) Per quali valori del parametro reale α la funzione $f(x, y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1+y)}{(x^2 + \arctan^2 y)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

☺ – 10) Studiare la continuità e la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ di:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$