Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 3

☉ – 1) Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

(i) Calcolare la matrice Jacobiana DF e determinare in quali punti F è localmente invertibile. F è iniettiva?

(ii) Sia poi C la circonferenza unitaria (l'insieme dei punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$). Sapreste disegnare $F(C)$ (cioè l'immagine dei punti di C tramite F)? Stessa domanda per una circonferenza di centro l'origine e raggio R .

(iii) Qual è l'immagine della funzione F ?

☉ – 2) Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(e^x - x - \cos(y))$$

nel punto $(0, 0)$ e utilizzarlo per calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(e^x - x - \cos(y))}{x^2 + y^2}.$$

☉ – 3) Calcolare massimi e minimi locali e globali (= relativi e assoluti) di $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sull'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$. Stessa domanda per la funzione $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x$ sulla striscia $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

☉☉ – 4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Dimostrare che f non può essere iniettiva. [Suggerimento: considerare la funzione $F(x, y) = (f(x, y), y)$ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$].

☉ – 5) Studiare la natura dei punti stazionari delle funzioni

$$f(x, y) = xy(x - 1), \quad g(x, y) = x^4 + y^4 + 1 + (x + y)^2.$$

☉☉ – 6) Studiare la natura dei punti stazionari delle funzioni

$$f(x, y) = xe^y - ye^x, \quad g(x, y) = x^3 - xy^2 + 2xy, \quad h(x, y) = xe^{y-x} - y.$$

☉ – 7) Determinare massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy, \quad \text{su } [-1, 1] \times [-1, 1], \quad g(x, y) = 6x - 2y, \quad \text{su } x^2 + y^2 \leq 1.$$

☉ – 8) Dato l'astroide di equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, si conduca la retta di equazione $x = a$ (con $0 \leq a \leq 1$). Detti P_1 e P_2 i punti di intersezione della retta con l'astroide, si calcoli il valore di a per il quale è minima la quantità $d_2^2(O, P_1) + d_2^2(O, P_2) + d_2^2(P_1, P_2)$.

☉☉ – 9) Studiare i massimi e minimi locali di $f(x, y) = x^4 + ax^2y + y^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

☉ – 10) Siano $P^i = (x^i, y^i, z^i)$ per $i = 1, \dots, M$, M punti dello spazio $\mathbb{R}^3$. Siano

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^M [(x - x^i)^2 + (y - y^i)^2 + (z - z^i)^2].$$

e, se $M = 2$,

$$g(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 [|x - x^i| + |y - y^i| + |z - z^i|].$$

Determinare i punti di minimo relativo di $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$.