Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 4

☺ – **1)** Consideriamo le curve in forma parametrica in $\mathbb{R}^2$

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos t, \cos(2t)), \qquad \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (1+\cos t, \sin t)$$

$$\phi :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t) \qquad \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t^3, \sin t)$$

Per ognuna di queste curve, dire per quali valori del parametro t esse sono continue, per quali sono C^1, e calcolare la derivata $\phi'(t)$. Inoltre dire se si tratta di curve regolari o semplici. Infine disegnarne il grafico. [FACOLTATIVO: calcolare la lunghezza d'arco $s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma$.]

☹ – **2)** Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 e supponiamo che il determinante Jacobiano $\det DF(x)$ sia diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che l'applicazione F è *aperta*, ossia per ogni aperto A anche l'insieme $F(A)$ è aperto.

[FACOLTATIVO: ☹☹ Aggiungiamo l'ipotesi $\lim_{|x| \to \infty} |F(x)| = +\infty$, il che vuol dire: per ogni $N > 0$ esiste $M > 0$ tale che $|x| > M$ implica $|F(x)| > N$. Allora l'immagine di F è tutto $\mathbb{R}^n$].

☹ – **3)** Sia data una superficie S in $\mathbb{R}^3$, regolare di dimensione 2, in forma cartesiana, ossia del tipo

$$z = \psi(x, y), \qquad \psi : A \to \mathbb{R}$$

dove A è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto della superficie, cioè tale che $(x_0, y_0) \in A$ e $z_0 = \psi(x_0, y_0)$. Dimostrare che esiste una palla $B \subset \mathbb{R}^3$ di centro P e un'applicazione C^1 localmente invertibile $G : B \to \mathbb{R}^3$ che porta i punti della superficie S nel piano coordinato $z = 0$; in altri termini, con un cambiamento di coordinate si può *spianare* localmente la superficie. [Suggerimento: $G(x, y, z) = (x, y, z - \psi(x, y))$].

☺ – **4)** Consideriamo la superficie S in $\mathbb{R}^3$ espressa in forma cartesiana

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

Verificare che il punto $P = (1, 1, 3)$ appartiene alla superficie. Scrivere l'equazione del piano tangente a S nel punto P. Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine parallelo al piano tangente. Calcolare un vettore normale a S in P. Quali di questi vettori appartengono allo spazio tangente a S in P: $(0, 0, 0)$, $(0, -2, 1)$, $(6, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$?

☺ – **5)** Siano

$$f(x, y) = \int_{\text{sen}(x)}^{\text{sen}(y)} e^{t^2}\, dt\,, \qquad Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\,.$$

Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di f su Q.

☺ – **6)** Sia $f(x, y) = y^2(1+3\text{sen}(x)) - 3e^x y + (1+\cos(x)) - x^3 e^y$. Dimostrare che esistono due punti di ascissa 1 intorno ai quali l'equazione $f(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto ad una delle due variabili, e determinare il comportamento della funzione esplicita.

☹ – **7)** (ESERCIZIO FUORI PROGRAMMA) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2x - y(x)\, \cos(xy(x))}{x\, \cos(xy(x))} \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

☹ – **8)** Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = 4 - z$ sull'ellisse ottenuta intersecando il cilindro $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$.

☺☹– **9)** Si consideri la funzione $f(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3e^x - 3$. (i) Verificare che in un intorno di $(0, 0)$, l'insieme dei punti del piano tali che $f(x, y) = 0$ può essere definito esplicitamente nella forma $y = g(x)$. (ii) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x}\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2}\,.$$

☺– **10)** Scrivere i primi tre termini del polinomio di Taylor associato alla funzione $x = x(y)$ definita implicitamente da $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ intorno al punto $(2, 1)$.