Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 5

☹ – **1)** Sia E un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ un punto qualunque. Chiamiamo

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y) \colon x \in E\}$$

la *distanza* di x da E. Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in E$ tale che $d(x,x_0) \equiv d(x,E)$ (detto il *punto di minima distanza* di x da E). Ce ne possono essere due diversi?

☺ – **2)** (ESERCIZIO FUORI PROGRAMMA) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

[Suggerimento: utilizzare la nuova funzione incognita $z = x + y$].

☺ – **3)** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 + \alpha x + \beta y - e^{x+y}}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono parametri reali. Determinare l'insieme di definizione di f. Inoltre determinare per quali valori di α, β la funzione è continua, per quali valori è derivabile, per quali valori è differenziabile.

☺ – **4)** Trovare massimi e minimi di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$ sul piano $x + y + z = 1$.

☺☹ – **5)** Data la curva $2x^2 + y^2 - x = 0$, trovare i suoi punti più vicini a $(0,0)$ e quelli più lontani da $(0,0)$. Stesso esercizio per la curva $2x^4 + y^4 - xy = 0$

☹ – **6)** Verificare che il modulo del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può calcolare nel modo seguente:

$$|x| = \max\{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \colon y \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1\}.$$

☹ – **7)** Torniamo all'esercizio 1), e supponiamo di avere due insiemi E e F chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$. Definiamo

$$d(E,F) = \sup\{d(x,F), x \in E\}\,.$$

Mostrare con un esempio che può essere $d(E,F) \neq d(F,E)$.

☺ – **8)** (ESERCIZIO FUORI PROGRAMMA) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0\,, \\ \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

☺☹ – **9)** Determinare i punti di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \\ -(x^2+y^2) & (x,y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

☺ – **10)** Sia $f(x,y,z) = x^2 - z$. Trovare massimi e minimi di f su $E = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

☹ – **11)** Calcolare massimo e minimo di $f(x,y) = x^6 - 15x^4\,y^2 + 15x^2\,y^4 - y^6$ sull'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$. Suggerimento: esiste un modo *molto* rapido per eseguire il calcolo.

☺☹ – **12)** Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x,y,z) = z(x^2 + y^2) + 2xy$ nel cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \;, 0 \leq z \leq 1\}$.

☹ – **13)** Definiti

$$f_\alpha(x,y) = \left[\left(\frac{x}{y^2+1} \right)^2 - \frac{|x|}{y^2+1} + 1 \right]^\alpha$$

ed

$$T_\theta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\theta(y^2+1) \leq x \leq \theta(y^2+1) \;, -1 \leq y \leq 1\} \;.$$

Determinare massimo e minimo assoluto di f_α in T_θ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $\theta \in (0, +\infty)$. (Suggerimento: pensare T_θ come l'unione dei punti $(h(y^2+1), y)$ al variare di $h \in [-\theta, \theta]$)

☺ – **14)** Trovare massimo e minimo di $f(x,y) = 2x + y$ sulla curva del piano $x^2 - xy + y^2 = 1$.

☺– **15)** Trovare il punto sulla retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione delle due superfici :

$$x + y + z = 0 \quad , x + 2y - z = 0$$

che ha distanza euclidea massima dal punto $(1,1,1)$

☺☹ – **16)** Determinare massimo e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{(x+1)^2 + k(y-1)^2}$ sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

☺ – **17)**Determinare massimo e minimo assoluti per $f(x,y) = 3x - 2y$ nell'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |\mathrm{sen}(x)|, x^2 + y^2 \leq 25 \;, -\pi \leq x \leq \pi\}$.

☺ – **18)** Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti (se esistono) per la funzione $f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{x-y}$ (i) in $\mathbb{R}^2$ e (ii) in $[-2,0] \times [0,3]$