Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 6

⊙⊙ – 1) Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:

- (i) arco della parabola $f(x) = x^2$ fra i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$;
- (ii) arco della curva $f(x) = \log x$ fra i punti di ascissa $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$;
- (iii) arco della spirale di Archimede $r(\theta) = a \cdot \theta$ ($a > 0$) per $0 \leq \theta \leq 2\pi$;
- (iv) ⊙ lunghezza totale dell'asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

⊙ – 2) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ nei casi seguenti:

$$\omega(x, y) = (x + y)dx + (x - y)dy, \quad \gamma = \text{arco di circonferenza unitaria fra } (1, 0) \text{ e } (0, 1)$$

$$\omega(x, y) = \frac{dx}{x + y} + (x^2 + y^2)dy, \quad \gamma = \text{arco di parabola } y = x^2 \text{ fra } (1, 1) \text{ e } (2, 4)$$

$$\omega(x, y, z) = y dx - z dy + x dz, \quad \gamma = \text{segmento fra } (0, 0, 1) \text{ e } (1, 1, 2).$$

Queste forme sono chiuse? hanno una primitiva, ossia sono esatte? e in caso affermativo quali sono *tutte* le primitive? [Nota: per rispondere alla seconda domanda, risolvere direttamente le equazioni $D_1 f = \omega_1, \dots$].

⊙ – 3) Sia $\Omega = \{(x, y) : x + y \neq 0\}$, e sia

$$\omega = \frac{y}{(x + y)^2} dx - \frac{x}{(x + y)^2} dy.$$

Determinare se $\omega(x, y)$ è chiusa, esatta, e in caso affermativo calcolarne *tutte* le primitive. In generale, se $\omega(x)$ è una forma esatta su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, con primitiva f , come si possono descrivere tutte le altre primitive di ω ?

⊙⊙ – 4) Data la forma $\omega(x, y) = e^y dx + (1 + x e^y) dy$, calcolare il suo integrale sulla curva $y = x^2 + e^x \cos x$ fra i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

⊙ – 5) Determinare φ in $C^1(\mathbb{R})$, con $\varphi(0) = 0$ tale che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = [2x + \varphi(y)] dx + [x(y - \varphi(y))] dy,$$

sia esatta, e calcolarne la primitiva che si annulla nell'origine.

⊙ – 6) Sia $\omega(x, y) = y f(x) dx + x f(y) dy$. Determinare f affinché ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

⊙ – 7) Data la forma differenziale $\omega(x, y) = 2x \varphi(y) dx + x^2 \varphi(y) dy$, determinare l'unica funzione φ tale che $\varphi(0) = 1$ e che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$. Successivamente, calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione $\rho = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

⊙⊙ – 8) Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2} dx + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2} dy, \quad p, q, r, s \in \mathbb{R}..$$

determinare per quali valori dei parametri la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e per quali valori è esatta. In corrispondenza di tali valori, calcolare le primitive.

⊙ – 9) Dopo aver stabilito se è continua, derivabile, regolare, calcolare per ogni $R > 0$ la lunghezza della curva:

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

⊙ – 10) Data la forma differenziale

$$\left(1 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right) dy,$$

determinarne l'insieme di definizione. È una forma esatta? In caso affermativo, calcolarne la primitiva che nel punto $(-1, 3)$ assuma il valore 4.