

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 7

☺ – 1) Trovare tutte le funzioni $a(x, y, z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tali che la forma differenziale

$$y \, dx + x \, dy + a(x, y, z) \, dz$$

sia esatta, e calcolare tutte le primitive. Allo stesso modo, trovare tutte le funzioni $a(y), b(x) \in C^1(\mathbb{R})$ tali che la forma differenziale

$$a(y) \, dx + b(x) \, dy$$

sia esatta, e calcolare tutte le primitive.

☺ – 2) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 strettamente positiva. Dimostrare che l'area del sottografico E di f è uguale a $\int_{\gamma} x \, dy$ dove γ è il bordo di E percorso una volta in senso antiorario. (Si può anche esprimere come $-\int_{\gamma} y \, dx$ o anche $\frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx)$; il risultato è sempre lo stesso).

☺ – 3) Calcolare l'integrale delle seguenti forme lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 dal punto $(2, 0)$ al punto $(0, 2)$ in senso antiorario [suggerimento: in qualche caso, conviene scegliere un cammino più comodo o addirittura trovare una primitiva...]

$$\omega = \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \omega = y \sin(xy) \, dx + x \sin(xy) \, dy, \quad \omega = \frac{4x^3 \, dx + 4y^3 \, dy}{x^4 + y^4}.$$

☺ – 4) (i) Se $f(z)$ è olomorfa, la funzione $f(\bar{z})$ è olomorfa? e la funzione $\overline{f(\bar{z})}$?

(ii) Calcolare i seguenti integrali complessi lungo la circonferenza di centro 0 e raggio 2 (percorsa una volta in senso antiorario):

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} \, dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1+z}{z} \, dz, \quad \int_{\gamma} (z^3 - z) \, dz, \quad \int_{\gamma} (z^3 - \bar{z}) \, dz.$$

☺ – 5) Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $f(z)$ tale che $\Re(f(z)) = 3x^2 + y^2$. Trovare due funzioni continue su $\mathbb{C}$ la cui parte reale è $3x^2 + y^2$.

☺ – 6) Determinare una funzione (non nulla) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $u(x, y) = \phi(x) \sin(y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$. Successivamente, determinare almeno una funzione olomorfa di cui u sia la parte reale.

☺ – 7) Calcolare, al variare di n ,

$$I_n = i \int_0^{2\pi} [2 \cos(\theta)]^{2n} \, d\theta,$$

dimostrando che si ha

$$I_n = \int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{1}{z}, \quad \gamma = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

e successivamente calcolando quest'ultimo integrale.

☺ – 8) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 1)},$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 4, percorsa in senso antiorario.

☺ – 9) Verificare se la seguente forma differenziale è esatta:

$$[\sin(x+y) - \sin x \sin z] \, dx + [\sin(x+y) - \cos(y-z)] \, dy + [\cos x \cos z + \cos(y-z)] \, dz.$$

In caso affermativo determinarne *tutte* le primitive.

☺ – 10) Sia ∂T l'ellisse avente come assi di simmetria gli assi coordinati del piano xy e passante per i punti $(2, 0)$ e $(0, 1)$, percorsa in senso antiorario, si calcoli

$$I = \int_{\partial T} (x^3 + y^2) \, dx + (x^2 + y^3) \, dy.$$