Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 8

☺☹ – **1)** Sia $f : E \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa su $E \subseteq \mathbf{C}$ aperto connesso. Dimostrare che se f assume solo valori reali, allora f è costante. (☹) Dimostrare che se f ha modulo costante (cioè $|f(z)| = C$) allora f è costante.

☹ – **2)** Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ una curva chiusa C^1 che non passa per l'origine e consideriamo la funzione $F : [a, b] \to \mathbf{C}$ definita come

$$F(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

(i) Calcolare la derivata $F'(s)$.
(ii) Data la funzione $G(s) = \gamma(s)e^{-F(s)}$, dimostrare che G è costante su $[a, b]$ (calcolandone la derivata).
(iii) Dedurne che $e^{-F(b)} = 1$ e quindi $F(b) = 2\pi in$ per qualche intero n (positivo o negativo).
(iv) Concludere che il numero

$$I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

è sempre un numero intero. Questa è la definizione rigorosa del “numero dei giri che γ fa intorno a $z = 0$”, e si chiama l'*indice di* γ *rispetto a* 0 (o anche numero di avvolgimento). Sapreste scrivere la formula per il numero dei giri $I_\gamma(z_0)$ intorno a un punto arbitrario z_0?

☺ – **3)** Calcolare i seguenti integrali iterati, prima nell'ordine $dydx$ e poi nell'ordine inverso:

$$\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy, \qquad \int_1^2 dx \int_1^2 (x^3 + \sqrt{x+y}) dy.$$

☺ – **4)** Calcolare l'integrale $\int\int_Q f(x, y)dxdy$ dove Q è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ e $f(x, y)$ è una delle funzioni seguenti:

$$f(x, y) = 1 - x - y \quad \text{se } x + y \le 1, \qquad f(x, y) = 0 \quad \text{altrimenti;}$$
$$f(x, y) = xy \quad \text{se } x^2 + y^2 \le 1, \qquad f(x, y) = 0 \quad \text{altrimenti;}$$
$$f(x, y) = x + y \quad \text{se } x^2 \le y \le x, \qquad f(x, y) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

☺ – **5)** Calcolare

$$\iint_C \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} \, dx \, dy \,, \qquad C = [0, 1] \times [1, 2] \,.$$

☹ – **6)** Verificare, senza calcolare l'integrale, che

$$7\pi[\ln(3) - \ln(4)] \le \iint_C \ln[(y - x^2 + 2)^7] \, dx \, dy \le 7\pi \ln(3) \,, \qquad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\} \,.$$

☹ – **7)** Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_C e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy \,, \qquad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \,, \; \frac{y}{2} \le x \le \min(y, 1)\} \,.$$

☺ – **8)** Calcolare (se esiste)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \,.$$

☺ – **9)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_Q \frac{x\sqrt{|y|}}{1 + \sqrt{|y|}} \, dxdy \,,$$

dove $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \,, -1 \le y \le 2\}$.

☺ – **10)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_F \frac{dxdy}{1 + x} \,,$$

dove $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \,, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.