Analisi II, a.a. 2017-2018 — Esercizi 9

☺ – **1)** Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega = \frac{dx}{1+y^2} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy$$

mentre γ è la curva

$$\gamma(t) = \left(e^{\sin t}, \quad \frac{2\cos t}{1+\cos^2 t}\right), \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

☺ – **2)** Data la forma su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = 2xz\ dx + yz\ dy + A(x,y)\ dz$$

determinare sotto quali condizioni sulla funzione $A(x,y)$ la forma è chiusa, esatta, e quindi calcolarne tutte le primitive.

☺ – **3)** Sia $f(z) = u + iv$ una funzione continua di parte reale u e parte immaginaria v. Se $v(x,y) = xy$, per quali funzioni $u(x,y)$ la funzione f è olomorfa? Se $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, per quali $v(x,y)$ la funzione f è olomorfa?

☺ – **4)** Calcolare i seguenti integrali multipli sui domini indicati a fianco:

$$\int\int_D (x^2y + y^3)dx\ dy, \qquad D = \{0 \le x \le 2,\ -2 \le y \le -1\}$$

$$\int\int\int_D (xyz^2)dx\ dy\ dz, \qquad D = \{0 \le x \le 1,\ -x \le z \le x,\ x+z \le y \le 4\}$$

$$\int\int_T (x-y^2)dx\ dy, \qquad T = \text{triangolo di vertici } (0,0),\ (1,1) \text{ e } (2,-1)$$

☺ – **5)** Calcolare il seguente integrale utilizzando le coordinate polari:

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dy.$$

Stessa domanda per l'integrale

$$\int\int_C y\ dx\ dy,$$

dove C è la metà superiore (cioè con $y \ge 0$) del cerchio di centro $(a/2, 0)$ passante per l'origine. Stessa domanda per l'integrale

$$\int\int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dx\ dy,$$

dove D è la metà superiore ($y \ge 0$) del cerchio di centro l'origine e raggio a.
Infine effettuare il cambiamento di variabili $u = x+y$, $v = x-y$ nell'integrale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy$$

e poi calcolarlo.

☹ – **6)** (FUORI PROGRAMMA) Dimostrare che se un insieme E è trascurabile secondo Peano-Jordan, anche la sua chiusura è trascurabile.

☺ – **7)** Dimostrare che per ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e per ogni (x,y) vale la formula

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.$$

☺ – **8)** Cambiare l'ordine di integrazione negli integrali seguenti (senza calcolarli):

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy, \qquad \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy, \qquad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$$

☹☹ – **9)** Sia Q il quadrato $[0,1]\times[0,1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ 2y & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

(i) Dimostrare che l'integrale $\int_0^t f(x,y)dy$ esiste per ogni $0 \le t \le 1$ e che

$$\underline{\int_0^1} \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t^2, \qquad \overline{\int_0^1} \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t.$$

Quindi in particolare l'integrale iterato $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ esiste e vale 1.
(ii) Dimostrare che l'integrale $\int_0^1 (\overline{\int_0^1} f(x,y)dx)dy$ esiste e calcolarne il valore.
(iii) Dedurre che f *non* è integrabile su Q.

☺ – **10)** Calcolare

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)^2 \, d\sigma\,,$$

dove Σ è la parte della superficie $z = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ delimitata dai piani $z=1$ e $z=2$.

☺ – **11)** Calcolare l'area della superficie $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ al variare di (x,y) in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}\,.$$

☹ – **12)** Calcolare l'area della superficie $y^2 + z^2 = 6x$, delimitata dal piano $x = 3$ ed esterna al cilindro di equazione $y^2 = 3x$.

☺ – **13)** Calcolare

$$\int_\gamma \left(\frac{2x}{1+(x^2+y)^2} + \frac{1}{2\sqrt{10+x}} \right) dx + \frac{1}{1+(x^2+y)^2}\, dy$$

dove γ indica l'arco più lungo dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ compreso tra $A = (-3,0)$ e $B = (0,2)$, (cioè γ passa per $(0,-2)$ e $(3,0)$).

☺☹ – **14)** Calcolare l'integrale della forma

$$\omega = (y^2 e^{xy^2} - \sin(x-y) + 1)\; dx + (2xye^{xy^2} + \sin(x-y) + x)\; dy$$

sulla curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. (Suggerimento: pensare ω come somma di tre forme differenziali)

☺ – **15)** Calcolare:

$$\int\!\!\int_T x \sin^2(x+y)\; dxdy\;,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le x \le 0,\ |x+y| \le \frac{\pi}{2}\}$.

☺ – **16)** Calcolare:

$$\int\!\!\int_T |x+y| \mathrm{e}^{x-y}\; dxdy\;,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-2)$.

☺ – **17)** Calcolare:

$$\int\!\!\int_D \mathrm{e}^{x^2+y^2-\arctan\frac{y}{x}}\; dxdy\;,$$

dove $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

☺ – **18)** Data la funzione $u(x,y) \in C^2(A)$, armonica in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, determinare una funzione olomorfa $f(x+iy)$ in A, la cui parte reale è proprio $u(x,y)$, nei seguenti casi ☺ – i) $u(x,y) = 3x+2y$ ed $A = \mathbb{R}^2$ ☹☹– ii) $u(x,y) = 3\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ ed $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\} \setminus \{x \ge 0, y \le 0\}$ (Suggerimento: Si ricordi che $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$, dove $v(x,y)$ è una primitiva della forma differenziale $-u_y(x,y)dx + u_x(x,y)dy$).