

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 1

☺ – 1) Calcolare le seguenti distanze e norme:

- (i) $d_\infty(x, y)$ dove $x = \{x_j\}$ e $y = \{y_j\}$ sono le successioni di ℓ^∞ definite da $x_j = (-1)^j$, $y_j = j/(j+1)$;
- (ii) $d_\infty(f, g)$ dove f, g sono le funzioni di $C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ date da $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$;
- (iii) $d_p(f, 0)$ dove f è la funzione di $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ data da $f(x) = x^\alpha$ (dove α è un numero reale positivo fissato).

(i) Si tratta di calcolare

$$d_\infty(x, y) = \sup_{j \geq 1} \left| (-1)^j - \frac{j}{j+1} \right|;$$

dato che

$$\left| (-1)^j - \frac{j}{j+1} \right| = \frac{1}{j+1} \text{ per } j \text{ pari, } = \frac{2j+1}{j+1} \text{ per } j \text{ dispari,}$$

vediamo che il sup dei termini con indice pari è $1/3$ (successione decrescente positiva il cui primo termine è $1/3$ per $j = 2$), mentre il sup dei termini con indice dispari è 2 (successione crescente positiva che tende a 2). Ne segue che la distanza delle due successioni è uguale a 2 .

(ii) Si ha

$$d_\infty(f, g) = \sup_{|x| \leq 1} |f(x) - g(x)| = \sup_{|x| \leq 1} |5x - 5| = \sup_{|x| \leq 1} (5x - 5) = 10$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tolto il modulo perché la funzione è positiva sull'intervallo considerato, e il sup chiaramente è il massimo, che viene assunto nel punto $x = -1$.

(iii) Si ha con un semplice calcolo

$$d_p(f, 0) = \left(\int_0^1 |x^\alpha - 0|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 x^{p\alpha} dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p\alpha + 1} \right)^{1/p}$$

☺☺ – 2) In quali dei seguenti casi la coppia (X, d) è uno spazio metrico?

- (i) X è l'insieme delle caselle di una scacchiera 8×8 , $d(x, y)$ è il numero minimo di salti che un cavallo (degli scacchi...) deve fare per passare dalla casella x a quella y .
- (ii) X è l'insieme degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, e $d(I_1, I_2) = |I_1| + |I_2| - 2|I_1 \cap I_2|$, dove $|I|$ indica la lunghezza dell'intervallo. (☺) Se è uno spazio metrico, è completo?
- (iii) X è l'insieme di tutti i polinomi di una variabile, e $d(P, Q)$ è data dalla somma dei moduli dei coefficienti di $P - Q$.

(i) Anzitutto controlliamo che la funzione $d(x, y)$ sia effettivamente definita su tutte le coppie x, y , il che non è immediatamente chiaro; ma basta osservare (facendo un piccolo disegno o procedendo sperimentalmente...) che in tre salti si può passare da una casella ad una qualunque casella adiacente (sopra, sotto, a destra o a sinistra); e quindi in un certo numero di salti si può sicuramente passare da una casella x ad una qualunque altra casella y , facendo un passo alla volta, anche se sicuramente ci sono percorsi più rapidi.

Chiaramente $d(x, y)$ è sempre maggiore o uguale a zero e se vale zero deve essere $x = y$, e anche la proprietà simmetrica $d(x, y) = d(y, x)$ è chiara (un percorso da x a y si può fare al contrario). Per dimostrare la disuguaglianza triangolare basta osservare che: se prendiamo tre caselle x, y, z , dire che $d(x, y) = n$ e $d(y, z) = m$ vuol dire che c'è un percorso A di n salti per andare da x a y e uno B di m salti per andare da y a z ; allora se eseguiamo il percorso B di seguito al percorso A otteniamo un percorso da x a z di $n + m$ salti, e per definizione di $d(x, y)$ questo ci dice che

$$d(x, z) \leq n + m = d(x, y) + d(y, z).$$

(ii) Chiamiamo a la lunghezza di $I_1 \setminus I_2$, b la lunghezza di $I_2 \setminus I_1$ e c la lunghezza di $I_1 \cap I_2$: si ha subito

$$d(I_1, I_2) = (a + b) + (b + c) - 2b = a + c.$$

Le prime due proprietà della distanza si verificano immediatamente, in particolare se la distanza è uguale a zero vediamo che $I_1 \setminus I_2$ e $I_2 \setminus I_1$ hanno lunghezza nulla quindi $I_1 = I_2$.

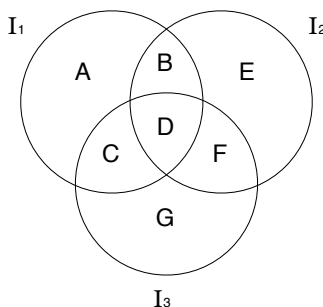
Per dimostrare la disuguaglianza triangolare ricorriamo alla stessa strategia: dati tre intervalli I_1, I_2, I_3 li spezziamo negli intervalli disgiunti

$$I_1 = A \cup B \cup C \cup D, \quad I_2 = E \cup F \cup B \cup D, \quad I_3 = G \cup C \cup F \cup D$$

dove

$$\begin{aligned} A &= I_1 \setminus (I_2 \cup I_3), & E &= I_2 \setminus (I_1 \cup I_3), & G &= I_3 \setminus (I_1 \cup I_2), \\ B &= (I_1 \cap I_2) \setminus I_3, & F &= (I_2 \cap I_3) \setminus I_1, & C &= (I_1 \cap I_3) \setminus I_2, \\ D &= I_1 \cap I_2 \cap I_3. \end{aligned}$$

Sembra complicatissimo? Basta raffigurare i tre intervalli come insiemi qualunque e diventa tutto chiaro:



Se indichiamo con a la lunghezza di A , con b la lunghezza di B , ..., con f la lunghezza di F , abbiamo subito

$$d(I_1, I_2) = a + c + e + f, \quad d(I_1, I_3) = a + b + g + f, \quad d(I_2, I_3) = b + e + c + g$$

e la disuguaglianza triangolare diventa ovvia.

Questo spazio metrico *non è completo*. Basta ad esempio considerare la successione di intervalli $I_n = [n, n + 1/n]$; $\{I_n\}$ è una successione di Cauchy in quanto $d(I_n, I_m) = 1/n + 1/m$, ma d'altra parte non può convergere a nessun intervallo fissato $[a, b]$ con $a < b$ perché $d(I_n, [a, b]) \rightarrow b - a \neq 0$. (Bisognerebbe aggiungere gli intervalli di lunghezza nulla $[a, a]$; ma allora il limite non sarebbe unico... che succede?)

(iii) Se $P = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n$ e $Q = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_mx^m$ sono due polinomi qualunque (notare che i gradi possono essere diversi!) possiamo scrivere semplicemente

$$d(P, Q) = \sum_{j \geq 0} |p_j - q_j|$$

dove la “serie” in realtà è una somma finita se intendiamo $p_j = 0$ per $j > n$, $q_j = 0$ per $j > m$. Chiaramente si tratta di una distanza, anche la disuguaglianza triangolare è molto semplice da dimostrare: se $R = r_0 + \dots$ è un terzo polinomio basta scrivere

$$\sum_{j \geq 0} |p_j - q_j| = \sum_{j \geq 0} |p_j - r_j + r_j - q_j| \leq \sum_{j \geq 0} |p_j - r_j| + \sum_{j \geq 0} |r_j - q_j|$$

per avere la tesi.

Secondo voi è uno spazio completo? (☹!)

☺ – 3) Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora per tutti i punti x, y, z vale la disuguaglianza

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Dedurre che, per ogni $y \in X$ fissato, l'applicazione $x \mapsto d(x, y)$ è continua da X in $\mathbb{R}$.

Vogliamo dimostrare le due disuguaglianze

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

e tutte e due sono esattamente la disuguaglianza triangolare (riscritta per punti diversi).

Ora per dimostrare la continuità di $x \mapsto d(x, y)$ possiamo ad esempio prendere una successione $x_n \rightarrow x$ e osservare che

$$|d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) \rightarrow 0$$

da cui la tesi.

☺ – 4) Sia (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ un punto fissato, e per ogni $x \in X$ definiamo una funzione ϕ_x da X a valori in $\mathbb{R}$ come

$$\phi_x(y) = d(x_0, y) - d(x, y).$$

Dimostrare i fatti seguenti.

(i) Per qualunque x , la funzione ϕ_x è continua e limitata, ossia ϕ_x è un elemento dello spazio metrico completo³ $Y = C_\ell(X, \mathbb{R})$. (Suggerimento: usare l'esercizio 3).

(ii) Abbiamo dunque definito un'applicazione $i : X \rightarrow Y$ che al punto $x \in X$ associa la funzione $\phi_x \in Y$ con la metrica d_∞ . Dimostrare che i è un'isometria (conserva le distanze).

(iii) Dedurre che ogni spazio metrico ammette un unico completamento a meno di isometrie.

(i) Dall'esercizio 3 abbiamo la disuguaglianza

$$|\phi_x(y)| \leq d(x, x_0)$$

quindi la funzione ϕ_x è limitata (per ogni x fissato). Anche la continuità segue subito dalla seconda parte dell'esercizio 3.

(ii) Presi due punti $x, z \in X$ abbiamo

$$d_\infty(i(x), i(z)) = d_\infty(\phi_x, \phi_z) = \sup_{y \in X} |\phi_x(y) - \phi_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(x_0, y) - d(x, y) - d(x_0, y) + d(z, y)|$$

cioè semplificando e ricordando la disuguaglianza dell'esercizio 3

$$d_\infty(i(x), i(z)) = \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z).$$

D'altra parte se calcoliamo la differenza nel punto $y = x$ otteniamo proprio

$$\phi_x(x) - \phi_z(x) = d(x, z)$$

e quindi in conclusione

$$d_\infty(i(x), i(z)) = d(x, z).$$

(iii) Dobbiamo dimostrare che esiste uno spazio metrico completo Z e un'isometria $i : X \rightarrow Z$, tale che Z è uguale alla chiusura dell'immagine $i(X)$. Chiaramente, usando quanto dimostrato nel punto (ii) basta definire Z come la chiusura di $i(X)$ dentro Y e abbiamo costruito un completamento di X . Resta solo da dimostrare l'unicità, e questo è l'unico passo delicato di tutto il ragionamento.

Se abbiamo due completamenti Z, W dello stesso spazio X , e $i : X \rightarrow Z$, $j : X \rightarrow W$ sono le rispettive isometrie, possiamo definire un'applicazione $k = i \circ j^{-1}$ che è un'applicazione biettiva dall'immagine di j , $j(X) \subset W$, all'immagine di i , $i(X) \subset Z$. Tale applicazione naturalmente è un'isometria.

Adesso possiamo *estendere* k ottenendo una nuova isometria $\bar{k} : W \rightarrow Z$ come segue: preso un punto qualunque $w \in W$ e una qualunque successione $w_n \rightarrow w$ di punti di $j(X)$ (tale successione esiste perché W è la chiusura di $j(X)$), definiamo

$$\bar{k}(w) = \lim k(w_n);$$

notare che il limite esiste perché $k(w_n)$ è una successione di Cauchy (le isometrie portano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy!). Notare anche che il limite non dipende dalla successione $w_n \rightarrow w$ che abbiamo scelto: se $w'_n \rightarrow w$ è un'altra successione, possiamo farle confluire in un'unica successione di Cauchy w''_n ponendo $w''_{2n} = w_n$, $w''_{2n+1} = w'_n$ e otteniamo che anche $k(w''_n)$ deve convergere, quindi il limite è lo stesso per l'unicità del limite.

Abbiamo finito: $\bar{k} : W \rightarrow Z$ è un'isometria (perché? facile verifica), quindi in particolare è iniettiva; inoltre è anche suriettiva, perché preso qualunque $z \in Z$ e una successione $z_n \rightarrow z$ di punti di $i(X)$ (successione di Cauchy in Z), possiamo definire $w_n = k^{-1}(z_n)$ (altra successione di Cauchy, in W), e preso $w = \lim w_n$ concludiamo che $\bar{k}(w) = z$.

☺ – **5)** Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quali condizioni si devono mettere su φ affinché $d_1(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ e $d_2(x, y) = \varphi(|x - y|)$ siano due distanze su $\mathbb{R}$?

Per la prima, la risposta è semplice: è sufficiente che φ sia iniettiva (e questa proprietà si usa solo per dimostrare che $d_1(x, y) = 0$ implica $x = y$). Per la seconda: innanzitutto $\varphi(s)$ deve essere maggiore o uguale a zero per ogni s , e zero solo nell'origine. La simmetria essendo banale, l'unico problema è la disuguaglianza triangolare. Vogliamo che

$$\varphi(|x - y|) \leq \varphi(|x - z|) + \varphi(|z - y|).$$

Una condizione sufficiente affinché ciò accada è che φ sia crescente, e *sublineare*, ovvero tale che

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b).$$

⁴Se facciamo queste due ipotesi, allora

$$\varphi(|x - y|) \leq \varphi(|x - z| + |z - y|) \leq \varphi(|x - z|) + \varphi(|z - y|).$$

☉ – **6**) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

è una distanza su X .

Usiamo l'esercizio precedente (dato che per d_2 non abbiamo mai usato le proprietà di $|\cdot|$ se non la disuguaglianza triangolare) e mostriamo che $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ è crescente e sublineare. Il fatto che sia crescente segue facilmente derivando. Per la sublinearità, abbiamo

$$\varphi(a + b) = \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} = \varphi(a) + \varphi(b).$$

☉ – **7**) Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$, e sia $d(P, Q) = d_2(P, Q)$ se P e Q sono nello stesso quadrante, e $d(P, Q) = d_2(P, 0) + d_2(0, Q)$ se sono in quadranti diversi. Dimostrare che d è una distanza, e determinare $B_2((1, 0))$.

L'unica cosa da dimostrare è la disuguaglianza triangolare. Siano P, Q e R in X . Se sono tutti e tre nello stesso quadrante, non c'è nulla da dimostrare. Se P e Q sono nello stesso quadrante, e R in un altro, si ha

$$d(P, Q) = d_2(P, Q) \leq d_2(P, 0) + d_2(Q, 0) \leq d_2(P, 0) + d_2(0, R) + d_2(Q, 0) + d_2(0, R) = d(P, R) + d(P, Q).$$

Gli altri due casi (P e R nello stesso quadrante, e Q e R nello stesso quadrante) si trattano in maniera analoga “passando per l'origine”.

☉ – **8**) Sia $E = \ell^2$, e

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n).$$

Dimostrare che d è ben definita ma non è una distanza.

d è ben definita dal momento che qualsiasi successione di ℓ^2 è infinitesima. Non è una distanza perché assegna distanza 0 a tutte le coppie di successioni...

☉ – **9**) Dimostrare che è una contrazione su $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$ la funzione

$$F : C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R})$$

$$f(x) \rightarrow F(f(x)) = 1 + \int_0^x y f(y) dy, x \in [0, 1]$$

Trovare poi un punto fisso di F (suggerimento: derivando...).

Per ogni $f \in C^0[0, 1]$, $y f(y) \in C^0[0, 1]$ quindi $F(f(x))$ è ben definita, inoltre si dimostra con facilità che $F(f(x))$ è continua in $x \in [0, 1]$.

Dimostrare che F è una contrazione da $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ in $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$, equivale a dimostrare che:

$$\forall f_1, f_2 \in C^0[0, 1] \exists \alpha \in (0, 1) : d_\infty(F(f_1), F(f_2)) \leq \alpha d_\infty(f_1, f_2).$$

Per prima cosa calcoliamo:

$$|F(f_1(x)) - F(f_2(x))| = \left| \int_0^x y(f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq \int_0^x y |f_1(y) - f_2(y)| dy \leq \max_{y \in [0, x]} |f_1(y) - f_2(y)| \int_0^x y dy = \frac{x^2}{2} d_\infty(f_1, f_2),$$

quindi:

$$d_\infty(F(f_1), F(f_2)) \leq \max_{x \in [0, 1]} \frac{x^2}{2} d_\infty(f_1, f_2) = \frac{1}{2} d_\infty(f_1, f_2).$$

Per il teorema delle contrazioni F ha dunque un unico punto fisso $g(x) \in C^0[0, 1]$ tale che per definizione $g(x) = F(g(x))$ (cioè $g(x) = 1 + \int_0^x y g(y) dy$, quindi in particolare $g(0) = 1$).

Un primo metodo per calcolare il punto fisso g consiste nel derivare ambo i lati della precedente uguaglianza, ottenendo così per il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale $g'(x) = xg(x)$. Ciò se g è strettamente positiva si può riscrivere come: $(\ln g(x))' = x$. Integrando ambo i membri della precedente uguaglianza si ha

$\ln g(x) = \frac{x^2}{2} + c$, e quindi $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} e^c$. Poiché da sopra $g(0) = 1$ allora $c = 0$, da cui $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Si osservi⁵ che g è una funzione strettamente positiva.

Un secondo metodo per calcolare il punto fisso g consiste nel considerare la successione per ricorrenza che lo genera, partendo ad esempio dalla funzione identicamente uguale ad 1, cioè:

$$\begin{cases} g_1(x) \equiv 1 \\ g_n(x) = F(g_{n-1}(x)) = 1 + \int_0^x y g_{n-1}(y) dy, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Per induzione si dimostra che $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k}}{k! 2^k}$. Poiché per definizione $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$, si ha che $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k! 2^k}$, da cui si deduce nuovamente la tesi, ricordando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale.

☺ – **10**) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è una contrazione su $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_{\infty})$ la funzione

$$F : C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R})$$

$$f(x) \rightarrow F(f(x)) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} f(y) dy, \quad x \in [0, 1]?$$

Per ogni $f \in C^0[0, 1]$, $e^{-\lambda y} f(y) \in C^0[0, 1]$ quindi $F(f(x))$ è ben definita, inoltre si dimostra con facilità che $F(f(x)) \in C^0[0, 1]$, come prodotto di due funzioni continue.

Dimostrare che F è una contrazione da $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ in $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$, equivale a dimostrare che:

$$\forall f_1, f_2 \in C^0[0, 1] \exists \alpha \in (0, 1) : d_{\infty}(F(f_1), F(f_2)) \leq \alpha d_{\infty}(f_1, f_2).$$

Per prima cosa consideriamo il caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} |F(f_1(x)) - F(f_2(x))| &= e^{-\lambda x} \left| \int_0^x e^{-\lambda y} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} |f_1(y) - f_2(y)| dy \leq \\ &\leq \max_{y \in [0, x]} |f_1(y) - f_2(y)| e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda y} dy \leq d_{\infty}(f_1, f_2) \left(\max_{x \in [0, 1]} e^{-\lambda x} \right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

da ciò segue :

$$d_{\infty}(F(f_1), F(f_2)) \leq \max_{x \in [0, 1]} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) d_{\infty}(f_1, f_2) \leq \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \right) d_{\infty}(f_1, f_2).$$

Poiché $(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}) < 1$, se $\lambda > 0$, ($e^t > 1 + t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$), F è una contrazione per $\lambda > 0$.

Se $\lambda < 0$ non è vero che $(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}) < 1$. Ciò non è sufficiente però a dimostrare che F non è una contrazione se $\lambda < 0$; per fare ciò occorre fornire due funzioni continue in $[0, 1]$, f_1, f_2 tali che:

$$d_{\infty}(F(f_1), F(f_2)) > \alpha d_{\infty}(f_1, f_2),$$

per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

Per $\lambda < 0$, basta considerare le funzioni continue $f_1(x) = e^{\lambda x}$ ed $f_2(x) \equiv 0$. Infatti

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f_1, f_2) &= \max_{x \in [0, 1]} |e^{\lambda x} - 0| = 1, \quad \text{mentre} \\ d_{\infty}(F(f_1), F(f_2)) &= d_{\infty} \left(e^{-\lambda x} \int_0^x dy, 0 \right) = \max_{x \in [0, 1]} |x e^{-\lambda x} - 0| = e^{|\lambda|} \end{aligned}$$

ed $e^{|\lambda|} \geq 1 > \alpha 1$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$. Quindi F non è una contrazione per $\lambda < 0$.

Analogamente per $\lambda = 0$, basta considerare le funzioni continue $f_1(x) \equiv 1$ ed $f_2(x) \equiv 0$. Infatti

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f_1, f_2) &= \max_{x \in [0, 1]} |1 - 0| = 1, \quad \text{mentre} \\ d_{\infty}(F(f_1), F(f_2)) &= d_{\infty} \left(\int_0^x dy, 0 \right) = \max_{x \in [0, 1]} |x - 0| = 1 \end{aligned}$$

ed $1 > \alpha 1$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$. Quindi F non è una contrazione per $\lambda = 0$.