Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 2

☺ – **1)** Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale fissato. Determinare l'insieme di definizione di f. Inoltre determinare per quali valori di α la funzione è continua in 0, per quali valori è derivabile in 0, per quali valori è differenziabile in 0.

La funzione è definita nell'origine e in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla. Il denominatore si annulla per

$$(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2 = 0 \quad \iff \quad \mathrm{sen}x = \mathrm{sen}y = 0$$

cioè nei punti

$$x = \ell\pi, \quad y = m\pi, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione l'insieme di definizione è

$$\{(0,0)\} \cup \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\ell\pi, m\pi) \colon \ell, m \in \mathbb{Z}\}\right).$$

Continuità in 0: utilizziamo la disuguaglianza

$$|\mathrm{sen}x| \leq |x|$$

vera per tutti gli x, e la disuguaglianza

$$|\mathrm{sen}x| \geq c|x|$$

vera per una qualunque fissata costante $c < 1$ purché x sia sufficientemente vicino a 0 (ad esempio $|\mathrm{sen}x| \geq 2|x|/\pi$ è vera per tutti gli x tali che $|x| \leq \pi/2$). Possiamo scrivere allora, per (x,y) vicino all'origine,

$$\frac{|xy|^\alpha}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2} \leq \frac{|xy|^\alpha}{c^2(x^2 + 2y^2)} \leq \frac{|xy|^\alpha}{c^2(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{c^2}\ r^{2\alpha - 2}$$

e quindi vediamo subito che $f \to 0$ quando $(x,y) \to 0$ non appena $\alpha > 1$. Se invece $0 \leq \alpha \leq 1$ otteniamo, sui punti del tipo (x,x)

$$f(x,x) = \frac{|x|^{2\alpha}}{3(\mathrm{sen}x)^2}$$

che non tende a 0 quando $x \to 0$ (infatti tende a $1/3$ per $\alpha = 1$, e tende a $+\infty$ per $\alpha < 1$). In conclusione f è continua in 0 se e solo se $\alpha > 1$.

Derivabilità in 0: se $\alpha > 0$, abbiamo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per tutti gli x, y vicini a 0, quindi i rapporti incrementali nell'origine sono entrambi identicamente nulli e la funzione è derivabile in $(0,0)$ con

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0.$$

Invece quando $\alpha = 0$ la funzione diventa (per $(x,y) \neq (0,0)$)

$$f(x,y) = \frac{1}{(\mathrm{sen}x)^2 + 2(\mathrm{sen}y)^2}$$

che non può essere derivabile né rispetto a x né rispetto a y (perché?).

Differenziabilità in 0: se esiste, il differenziale in 0 deve essere $L = df(0,0) \equiv 0$ dato che le derivate parziali sono nulle. Si tratta allora di capire quando è vero che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,0) - L(h,k)}{|(h,k)|} \equiv \lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{|(h,k)|} = 0.$$

Scrivendo esplicitamente l'espressione ($|(h,k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$), vogliamo sapere per quali valori di α si ha

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|^\alpha}{(\mathrm{sen}h)^2 + 2(\mathrm{sen}k)^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Come prima, possiamo scrivere subito

$$\frac{|hk|^\alpha}{(\mathrm{sen}h)^2 + 2(\mathrm{sen}k)^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{1}{c^2}\ r^{2\alpha - 3}$$

dato che $\sqrt{h^2+k^2}=r$. Quindi per $\alpha>3/2$ il limite è zero e la funzione è differenziabile nell'origine. Se invece $0\le\alpha\le 3/2$, proviamo a fare il limite per punti del tipo (h,h); l'espressione precedente diventa

$$\frac{|h|^{2\alpha}}{3(\mathrm{sen}h)^2}\frac{1}{|h|}=\frac{|h|^2}{3(\mathrm{sen}h)^2}|h|^{2\alpha-3}$$

ed esattamente come prima vediamo che il limite non è zero se $0\le\alpha\le 3/2$, quindi la funzione non è differenziabile in 0 per tali valori del parametro.

☹ – **2)** (i) Siano $f,\phi,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tre funzioni, supponiamo che f e g siano differenziabili nell'origine 0 con $f(0)=g(0)$, e che si abbia $f(x,y)\le\phi(x,y)\le g(x,y)$ per tutti gli (x,y). Dimostrare che allora anche ϕ è differenziabile in 0 e che $df(0)=d\phi(0)=dg(0)$.
(ii) Siano $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ due funzioni, f differenziabile nel punto 0 con $f(0)=0$, g soltanto continua. Dimostrare che il prodotto $f(x)g(x)$ è differenziabile in 0 e $d(fg)(0)=g(0)df(0)$.

(i) Anzitutto la funzione $u=g-f$ non è mai negativa e vale zero in 0, cioè ha un minimo in 0. Quindi la funzione $u(x,0)$ ha un minimo per $x=0$ ed essendo u derivabile otteniamo $D_1u(0,0)=0=D_1g(0)-D_1f(0)$. Analogamente studiando $u(0,y)$ otteniamo $D_2u(0,0)=0=D_2g(0)-D_2f(0)$. Quindi f e g hanno lo stesso gradiente nell'origine ed essendo esse differenziabili i loro differenziali coincidono in 0: $df(0)=dg(0)=L$. Dimostriamo infine che L è anche il differenziale di ϕ: infatti si ha

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-L(h,k)}{|(h,k)|}\le\frac{\phi(h,k)-\phi(0,0)-L(h,k)}{|(h,k)|}\le\frac{g(h,k)-g(0,0)-L(h,k)}{|(h,k)|}$$

(notare che $f(0)=\phi(0)=g(0)$) e dato che il primo e l'ultimo termine tendono a 0 per $(h,k)\to 0$, ne segue che anche il termine centrale tende a zero ossia la tesi.
(ii) Sia L il differenziale di f nell'origine. L'esercizio chiede di dimostrare che $g(0)L$ è il differenziale di fg nell'origine, ossia che il rapporto

$$\frac{(fg)(h,k)-(fg)(0,0)-g(0)L(h,k)}{|(h,k)|}\equiv\frac{(fg)(h,k)-g(0)\,L(h,k)}{|(h,k)|}$$

Riscriviamo il tutto come somma di due termini:

$$\frac{(fg)(h,k)-g(0)\,L(h,k)}{|(h,k)|}=\frac{f(h,k)-L(h,k)}{|(h,k)|}g(h,k)+\frac{L(h,k)}{|(h,k)|}(g(h,k)-g(0))=I+II.$$

Il termine I tende a zero perché $g(h,k)\to g(0)$ (g è continua) mentre

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,k)-L(h,k)}{|(h,k)|}=0$$

dato che L è il differenziale di f in 0. Nel secondo termine II il fattore $g(h,k)-g(0)$ tende a zero dato che g è continua; quindi basta dimostrare che il fattore $L(h,k)/|(h,k)|$ è limitato. Ma questo è evidente perché

$$\frac{L(h,k)}{|(h,k)|}=D_1f(0)\frac{h}{|(h,k)|}+D_2f(0)\frac{k}{|(h,k)|}$$

da cui

$$\frac{|L(h,k)|}{|(h,k)|}\le|D_1f(0)|+|D_2f(0)|$$

e quindi anche il termine II tende a zero.

☺ – **3)** Siano $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ due funzioni. Possiamo allora definire una funzione $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ponendo $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Dimostrare che se esiste il limite in $z_0=x_0+iy_0$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

allora le due funzioni sono derivabili nel punto (x_0,y_0) e devono valere le relazioni di Cauchy-Riemann nel punto (x_0,y_0), ossia

$$D_1u(x_0,y_0)=D_2v(x_0,y_0),\qquad D_2u(x_0,y_0)=-D_1v(x_0,y_0).$$

Il limite non dipende dal modo in cui la variabile $z=x+iy$ tende al punto x_0+iy_0. Ad esempio possiamo considerare punti del tipo

$$z=x+iy=(x_0+h)+iy_0,\quad h\to 0$$

(h reale) e allora otteniamo

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{(x_0+h)+iy_0-(x_0+iy_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{h}.$$

Dire che questo limite (di numeri complessi!) esiste equivale a dire che esistono i limiti sia della parte reale che della parte immaginaria. Allora se prendiamo la parte reale otteniamo (ricordando che $f = u + iv$)

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \equiv D_1 u(x_0, y_0)$$

mentre se prendiamo la parte immaginaria otteniamo

$$\operatorname{Im} f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \equiv D_1 v(x_0, y_0)$$

Ora invece scegliamo di avvicinare la variabile z al punto z_0 nel modo seguente:

$$z = x + iy = x_0 + i(y_0 + h), \quad h \to 0$$

e stavolta si ha

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+iy_0+ih) - f(x_0+iy_0)}{x_0+iy_0-(x_0+iy_0+ih)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{ih}.$$

Attenzione alla differenza: adesso c'è i a denominatore quindi

$$\frac{f(x_0+iy_0+ih) - f(x_0+iy_0)}{ih} = -i\frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0)}{h} + \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0)}{h}$$

Prendendo la parte reale otteniamo

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0)}{h} \equiv D_2 v(x_0, y_0)$$

mentre se prendiamo la parte immaginaria otteniamo

$$\operatorname{Im} f'(z_0) = -\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0)}{h} \equiv -D_2 u(x_0, y_0)$$

Uguagliando i due risultati otteniamo finalmente

$$D_1 u(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) = D_2 v(x_0, y_0)$$

e

$$D_1 v(x_0, y_0) = \operatorname{Im} f'(z_0) = -D_2 u(x_0, y_0).$$

☹ – **4)** Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice *positivamente omogenea* di *grado* α se per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e per ogni $t > 0$ si ha $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Dimostrare il Teorema di Eulero: sia f differenziabile, allora f è positivamente omogenea di grado α se e solo se $x \cdot Df(x) = \alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$.

Sia f positivamente omogenea. Allora derivando l'identità

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

rispetto a t otteniamo

$$x_1 D_1 f(tx) + \cdots + x_n D_n f(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

e scegliendo $t = 1$ otteniamo la tesi. (Notare che questo vale anche per $\alpha = 0$).
Viceversa, supponiamo che valga l'identità $x \cdot Df(x) = \alpha f(x)$, e consideriamo la funzione

$$\phi(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha} = t^{-\alpha} f(tx)$$

per un $x \neq 0$ fissato. La funzione è chiaramente ben definita e derivabile per $t \neq 0$, e la sua derivata è

$$\phi'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} x \cdot Df(tx)$$

ma l'identità $x \cdot Df(x) = \alpha f(x)$ implica che $(tx) \cdot Df(tx) = \alpha f(tx)$ ossia $x \cdot Df(tx) = t^{-1}\alpha f(tx)$, e sostituendo

$$\phi'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} t^{-1} \alpha f(tx) \equiv 0.$$

Ne segue che la funzione è costante: $\phi(t) = \phi(1)$ cioè

$$\frac{f(tx)}{t^\alpha} = f(x).$$

☺– **5)** Determinare, se esiste, a in $\mathbb{R}$ tale che sia continua su $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(y-\operatorname{sen}(x))}{\mathrm{e}^{y-\operatorname{sen}(x)}-1} & \text{se } y > \operatorname{sen}(x) \\ a & \text{se } y \leq \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Gli unici punti nei quali la funzione può non essere continua sono i punti sul grafico della funzione $y = \operatorname{sen}(x)$. Dal momento che se $(x,y) \to (x_0, \operatorname{sen}(x_0))$ con $y \leq \operatorname{sen}(x)$, il limite vale a, non resta che calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\operatorname{sen}(x_0))\,,y>\operatorname{sen}(x)} \frac{\operatorname{sen}(y-\operatorname{sen}(x))}{\mathrm{e}^{y-\operatorname{sen}(x)}-1}\,.$$

Con la sostituzione $z = y - \operatorname{sen}(x)$, si tratta di calcolare

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\mathrm{e}^z - 1} = 1\,,$$

e quindi $a = 1$.

☺ – **6)** Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{se } y \geq x^3 \end{cases}$$

Ragionando come nell'esercizio precedente, gli unici problemi si hanno per i punti (x,y) sulla curva $y = x^3$. Usando la definizione di f, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^3\,,y<x^3)} f(x,y) = x_0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^3\,,y\geq x^3)} f(x,y) = x_0^3\,,$$

e quindi f è continua solo in $(-1,-1)$, $(0,0)$ e $(1,1)$. Per quanto riguarda la derivabilità, è facile verificare che in *nessun* punto della curva $y = x^3$ esistono le derivate parziali, e quindi f è derivabile solo *fuori* da tale curva. Là dove è derivabile, è anche differenziabile (le derivate) parziali sono continue.

☺☹ – **7)** Dimostrare che sono definite e differenziabili su $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\,, \qquad g(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\,dt\,.$$

La funzione $h(t) = \operatorname{sen}(t)/t$, posta uguale ad 1 nell'origine, è continua e quindi integrabile su ogni intervallo di $\mathbb{R}$. Pertanto, f è be definita su $\mathbb{R}^2$. Per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$f_x(x,y) = -h(x)\,, \qquad f_y(x,y) = h(y)\,.$$

Essendo le derivate parziali continue, f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. La funzione $k(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ *non* è prolungabile per continuità nell'origine, ma, dal momento che ha un andamento asintotico uguale a $t^{-\frac{1}{2}}$, è integrabile in senso improprio. La funzione g è pertanto ben definita. Se x e y sono diversi da zero, si ha (per il teorema fondamentale del calcolo integrale),

$$g_x(x,y) = -2\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}\,, \qquad g_y(x,y) = 2\frac{\cos(y^2)-1}{y^4}\,.$$

Se, ad esempio, $x = 0$, e vogliamo calcolare la derivata parziale rispetto ad x in $(0, y_0)$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{h\to 0} -\int_0^{h^2} \frac{1-\cos(s)}{s^{\frac{5}{2}}}\,ds\,.$$

Usando il teorema di de l'Hopital, tale limite vale -1, che esattamente il limite di $g_x(x,y)$ per (x,y) tendente a $(0, y_0)$. Lo stesso ragionamento essendo ripetibile per ogni altra derivata, si ha che le derivate parziali sono continue su $\mathbb{R}^2$, e quindi f è differenziabile.

☺– **8)** Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^3$ di

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,|z|^\gamma}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma > 0\,.$$

Usando il fatto che $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e le analoghe per $|y|$ e $|z|$, è facile vedere che f è continua se $\alpha+\beta+\gamma>2$. Se $\alpha+\beta+\gamma=2$, è sufficiente calcolare il limite sulle rette $x=l\,t$, $y=m\,t$, $z=n\,t$ per rendersi conto che dipende dalla retta scelta. Se, poi, $\alpha+\beta+\gamma<2$, la funzione è illimitata superiormente in un intorno dell'origine, e quindi non ammette limite zero. Essendo $\alpha>0$ (così come β e γ), le derivate parziali di f nell'origine sono tutte nulle. Per la differenziabilità, si tratta di verificare quando

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{|h|^\alpha\,|k|^\beta\,|l|^\gamma}{(h^2+k^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}=0\,,$$

ed è facile vedere che ciò accade se e solo se $\alpha+\beta+\gamma>3$.

☺☹ – **9)** Per quali valori del parametro reale α la funzione $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad (x,y)=(0,0)\ . \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)$ per ogni α e' continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, inoltre sarà continua nell'origine se e solo se :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha}=f(0,0)=0\ .$$

Per y vicino a zero si ha $\log(1+y)=y+o(y)$ e $\arctan(y)=y+o(y)$ dove $o(y)$ è un quantitativo tale che $\lim_{y\to 0} o(y)/y=0$. Da ciò segue che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+y)}{(x^2+\arctan^2 y)^\alpha}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+xo(y)}{(x^2+y^2+o(y^2))^\alpha}=$$

passando a coordinate polari:

$$=\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\cos\theta\sin\theta+o(\rho^2)/\rho^2)}{(\rho^2+o(\rho^2))^\alpha}=\lim_{\rho\to 0} \rho^{2-2\alpha}\frac{(\cos\theta\sin\theta+o(\rho^2)/\rho^2)}{(1+o(\rho^2)/\rho^2)^\alpha}=0$$

se e solo se $2-2\alpha>0$ cioè se $\alpha<1$. Per $\alpha\leq 0$ la continuita' era in realtà immediata.

☺ – **10)** Studiare la continuità e la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ di:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad (x,y)=(0,0)\ . \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)$ e' continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, inoltre sarà continua nell'origine se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+|y|}=f(0,0)=0\ .$$

Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+|y|}=\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^2\theta\ \mathrm{sen}\theta)}{\rho^2\cos^2\theta+\rho|\sin\theta|}=\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\ \mathrm{sen}\theta}{\rho\cos^2\theta+|\sin\theta|}=0$$

indipendentemente da θ. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Per dimostrare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, utilizzeremo il teorema del differenziale totale, che ci permette di dedurre la differenziabilità in un punto a partire dalla continuità in un intorno delle derivate prime di f, che possono essere calcolate facilmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy|y|}{(x^2+|y|)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^4}{(x^2+|y|)^2}\ ,$$

essendo le stesse continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se ne deduce che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per dimostrare la differenziabilità di f nell'origine, dobbiamo calcolare le derivate parziali di f nell'origine come limite di rapporti incrementali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \ ,$$

e verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{x^2+|y|}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \ .$$

Passando in coordinate polari il precedente limite diventa:

$$\lim_{\rho\to 0} = \frac{\rho^3(\cos^2\theta \ \mathrm{sen}\theta)}{\rho^3\cos^2\theta + \rho^2|\sin\theta|} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2\theta \ \mathrm{sen}\theta}{\rho\cos^2\theta + |\sin\theta|} = 0 \ .$$

Anche quando $|\sin\theta| = 0$, cioè muovendosi lungo i punti dell'asse x, si verifica facilmente che il limite è 0. Quindi f risulta differenziabile (e continua) in $\mathbb{R}^2$.