

Analisi II, a.a. 2017-2018— Soluzioni 3

☉ – **1**) Consideriamo la funzione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

(i) Calcolare la matrice Jacobiana DF e determinare in quali punti F è localmente invertibile. F è iniettiva?

(ii) Sia poi C la circonferenza unitaria (l'insieme dei punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$). Sapreste disegnare $F(C)$ (cioè l'immagine dei punti di C tramite F)? Stessa domanda per una circonferenza di centro l'origine e raggio R .

(iii) Qual è l'immagine della funzione F ?

(i) Si ha subito

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

e quindi il determinante Jacobiano è $\det DF = -4xy$ che si annulla quando $x = 0$ oppure $y = 0$. Quindi F è localmente invertibile in tutti i punti che non sono su uno dei due assi cartesiani.

(ii) Chiaramente se $(x, y) \in C$ la prima coordinata del punto $F(x, y)$ è uguale a 1. Inoltre la seconda coordinata è compresa fra -1 e $+1$ perché $-1 = -(x^2 + y^2) \leq x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2 = 1$. In conclusione $F(C)$ è il segmento verticale di ascissa $x = 1$ e ordinate $-1 \leq y \leq 1$. Analogamente si verifica che F porta la circonferenza di centro l'origine e raggio R nel segmento verticale di ascissa R^2 e ordinate $-R^2 \leq y \leq R^2$.

(iii) Usiamo il risultato della parte (ii). Al variare del raggio $R \geq 0$, le circonferenze con centro l'origine coprono tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi le loro immagini coprono tutta l'immagine di F ; in altri termini l'immagine di F è formata dall'unione dei segmenti ottenuti sopra, e quindi è uguale all'insieme

$$F(\mathbb{R}^2) = \{(x, y): x \geq 0, -x \leq y \leq x\}.$$

☉ – **2**) Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di

$$f(x, y) = \sin(e^x - x - \cos(y))$$

nel punto $(0, 0)$ e utilizzarlo per calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(e^x - x - \cos(y))}{x^2 + y^2}.$$

Dato che

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = (e^x - 1) \cdot \cos(e^x - x - \cos y), \quad D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = \sin y \cdot \cos(e^x - x - \cos y),$$

mentre

$$D_1^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cdot \cos(e^x - x - \cos y) - (e^x - 1)^2 \sin(e^x - x - \cos y),$$

$$D_2^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos y \cdot \cos(e^x - x - \cos y) - \sin^2 y \sin(e^x - x - \cos y),$$

$$D_1 D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 - e^x) \sin y \cdot \sin(e^x - x - \cos y),$$

otteniamo subito che in $(0, 0)$

$$f(0, 0) = D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0,$$

$$D_1^2 f(0, 0) = D_2^2 f(0, 0) = 1, \quad D_1 D_2 f(0, 0) = 0.$$

Pertanto lo sviluppo di Taylor in $(0, 0)$ è semplicemente

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + R_2(x, y)$$

e quindi il limite richiesto è uguale a $1/2$.

☉ – **3**) Calcolare massimi e minimi locali e globali (= relativi e assoluti) di $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sull'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$. Stessa domanda per la funzione $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x$ sulla striscia $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

I punti stazionari di $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sono dati dal sistema di equazioni

$$D_1 f = 0, \quad D_2 f = 0$$

ossia

$$2x = 0, \quad 4y = 0$$

e quindi l'unico punto stazionario è l'origine $(0, 0)$, che è un punto interno all'insieme considerato. Per verificarne la natura calcoliamo l'Hessiana di f ; questa è costante (non dipende da (x, y) perché f è un polinomio di grado 2) e precisamente

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori positivi, quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale, in cui f vale 0. Notare che f è sempre positiva, quindi abbiamo trovato un punto di minimo assoluto.

Al bordo dell'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$, cioè sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, possiamo scrivere

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y^2 = 1 + y^2$$

e dato che y varia tra -1 e $+1$ è chiaro che f , ristretta al bordo, ha minimo quando $y = 0$ cioè nei punti $(\pm 1, 0)$, e massimo quando $y = \pm 1$, cioè nei punti $(0, \pm 1)$. Esaminiamo meglio questi punti. Notiamo che vi deve essere un punto di massimo assoluto per f (dato che $x^2 + y^2 \leq 1$ è un compatto), e non può essere interno (l'unico punto stazionario è $(0, 0)$ minimo), quindi deve necessariamente essere sul bordo, ossia deve essere uno dei quattro punti trovati. Ma

$$f(\pm 1, 0) = 1, \quad f(0, \pm 1) = 2$$

e quindi sicuramente i punti $(0, \pm 1)$ sono di massimo assoluto. Che si può dire degli altri due? Relativamente al bordo sono punti di minimo, ma è facile vedere che non si tratta di minimi locali: ad esempio $f(x, 0) = x^2$ vale meno di 1 per $|x| < 1$ e quindi vicino a $(1, 0)$ troviamo dei punti $(x, 0)$ in cui $f(x, 0) < f(1, 0)$. Discorso analogo per il punto $(-1, 0)$.

Seconda funzione $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x$: i punti stazionari sono dati da

$$2x - 6 = 0, \quad 6y = 0$$

ed otteniamo l'unico punto stazionario interno $(3, 0)$ in cui l'Hessiana è

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi abbiamo un minimo locale $(3, 0)$ in cui $f(3, 0) = -9$.

Studiamo ora il comportamento al bordo. Notare che non siamo sicuri che esistano massimo e minimo assoluto, in quanto l'insieme studiato non è compatto. Il bordo è formato dalle due rette $y = 1$ e $y = -1$. Si potrebbe anche osservare che $f(x, y) = f(x, -y)$, quindi i valori di f sulla prima retta sono gli stessi che sulla seconda retta e basta studiarne una, ad esempio $y = 1$.

Pertanto dobbiamo studiare la funzione ristretta al bordo $f(x, 1) = x^2 - 6x + 3$; essa chiaramente non ha massimo in quanto non è limitata superiormente. Possiamo subito dire che la funzione f sulla striscia non ha punti di massimo locali o globali: infatti dovrebbero essere sul bordo e quindi dovrebbero essere massimi anche per la funzione ristretta al bordo, ma questa non ne ha.

Invece $f(x, 1) = x^2 - 6x + 3$ ha un minimo per $x = 1/3$, quindi il punto $(1/3, 1)$ (e simmetricamente il punto $(1/3, -1)$) potrebbe essere di minimo in quanto lo è se confrontato con gli altri valori di f sul bordo. Ma basta confrontarlo con i punti interni vicini e vediamo subito che non si tratta di un minimo: ad esempio nei punti $(1/3, y)$ con $|y| < 1$ abbiamo $f(1/3, y) = 3y^2 - 17/9 < 3 - 17/9 = f(1/3, 1)$. Conclusione: minimo locale in $(3, 0)$, non vi sono massimi né locali né globali.

⊙⊙ – 4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Dimostrare che f non può essere iniettiva. [Suggerimento: considerare la funzione $F(x, y) = (f(x, y), y)$ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$].

Come da suggerimento, studiamo la funzione $F(x, y) = (f(x, y), y)$ la cui Jacobiana è

$$DF = \begin{pmatrix} D_1 f & D_2 f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il cui determinante Jacobiano è

$$\det DF = D_1 f(x, y).$$

Se $D_1 f(x, y) = 0$ in tutti i punti, questo vuol dire che la funzione $f(x, y)$ è costante per y fissato, e sicuramente non può essere iniettiva. Se invece in qualche punto (x_0, y_0) la derivata non si annulla, abbiamo

$$\det DF(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$$

e possiamo applicare il Teorema della funzione inversa: la funzione F è localmente invertibile vicino ad (x_0, y_0) . Ossia possiamo trovare un aperto U contenente (x_0, y_0) e un aperto V contenente $F(x_0, y_0)$ tali che $F : U \rightarrow V$ è biunivoca e la funzione inversa che indichiamo con $G = F^{-1}$ è di classe C^1 . Sappiamo quindi che $G \circ F$ e $F \circ G$ sono uguali all'identità; se scriviamo per esteso la seconda di queste proprietà otteniamo

$$F_1(G_1(x, y), G_2(x, y)) = x, \quad F_2(G_1(x, y), G_2(x, y)) = y$$

ossia

$$f(G_1(x, y), G_2(x, y)) = x, \quad G_2(x, y) = y$$

e quindi

$$f(G_1(x, y), y) = x.$$

Da questa identità è chiaro che f non può essere iniettiva: se si tiene x costante e si fa variare y , troviamo punti distinti in cui il valore di f è uguale.

☹– 5) Studiare la natura dei punti stazionari delle funzioni

$$f(x, y) = x y (x - 1), \quad g(x, y) = x^4 + y^4 + 1 + (x + y)^2.$$

Per il primo, abbiamo $\nabla f = ((2x - 1)y, x^2 - x)$, che si annulla in $(0, 0)$ e $(1, 0)$. L'origine è un punto di sella (è sufficiente osservare che f è sia negativa che positiva in un intorno di $(0, 0)$); essendo l'Hessiana in $(1, 0)$

data da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, anche $(1, 0)$ è di sella. Per la seconda, il gradiente è dato da $(4x^3 + 2(x + y), 4y^3 + 2(x + y))$ che si annulla in $(0, 0)$. Ovviamente, essendo $g(x, y) \geq 1$ per ogni (x, y) , e $g(0, 0) = 1$, l'origine è di minimo.

☺☺– 6) Studiare la natura dei punti stazionari delle funzioni

$$f(x, y) = x e^y - y e^x, \quad g(x, y) = x^3 - x y^2 + 2xy, \quad h(x, y) = x e^{y-x} - y.$$

Sia ha $\nabla f = (e^y - y e^x, x e^y - e^x)$, che si annulla solo in $(1, 1)$. L'Hessiano in $(1, 1)$ è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che non è

definito in segno: pertanto $(1, 1)$ è di sella. Si ha poi $\nabla g = (3x^2 - y^2 + 2y, -2xy + 2x)$, che si annulla in $(0, 0)$ e $(0, 2)$. Tali punti sono entrambi di sella per g . Infine, $\nabla h = ((x - 1) e^{y-x}, x e^{y-x} - 1)$, che si annulla solo in $(1, 1)$, che è di minimo (l'Hessiana è l'identità).

☹– 7) Determinare massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy, \quad \text{su } [-1, 1] \times [-1, 1], \quad g(x, y) = 6x - 2y, \quad \text{su } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Si ha $\nabla f = (2x + 2y, -2y + 2x)$, che si annulla solo in $(0, 0)$. Si ha $f(0, 0) = 0$. Studiamo ora f sulla frontiera del quadrato. Si deve studiare il comportamento di

$$f_1(x) = f(x, 1) = x^2 + 2x - 1, \quad f_2(x) = f(x, -1) = x^2 - 2x - 1, \quad f_3(y) = f(1, y) = -y^2 + 2y + 1, \quad f_4(y) = f(-1, y) = -y^2$$

Si vede facilmente che $\max f_1 = 2$, $\min f_1 = -2$, $\max f_2 = 2$, $\min f_2 = -2$, $\max f_3 = 1$, $\min f_3 = -2$, $\max f_4 = 2$, $\min f_4 = -2$, cosicché il massimo di f è 2, il minimo -2. Per la seconda, osserviamo che il gradiente non si annulla mai, mentre (parametrizzando la frontiera con $(\cos(\theta), \sin(\theta))$), si tratta di determinare il massimo ed il minimo di $h(\theta) = 6\cos(\theta) - 2\sin(\theta)$ al variare di θ tra 0 e 2π . È facile vedere che massimo e minimo sono raggiunti per $\theta = \arctg(-1/3)$ e per $\theta = \pi + \arctg(-1/3)$.

☹- 8) Dato l'asteroide di equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, si conduca la retta di equazione $x = a$ (con $0 \leq a \leq 1$). Detti P_1 e P_2 i punti di intersezione della retta con l'asteroide, si calcoli il valore di a per il quale è minima la quantità $d_2^2(O, P_1) + d_2^2(O, P_2) + d_2^2(P_1, P_2)$.

Sia $P_1 = (x, y)$. Allora la distanza da minimizzare è data da $f(x, y) = 2x^2 + 6y^2$, con il vincolo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. Parametrizzando tale vincolo come $x = \cos^3(\theta)$, $y = \sin^3(\theta)$, con θ tra 0 e $\pi/2$, si tratta di minimizzare $g(\theta) = 2\cos^6(\theta) + 6\sin^6(\theta)$. È facile vedere che il minimo è raggiunto per $\theta = \arctg(\sqrt[4]{3}) \dots$ Esercizio aggiuntivo: scrivere il problema unidimensionale corrispondente, calcolando la f in termini della sola a , e risolvere.

☹☹- 9) Studiare i massimi e minimi locali di $f(x, y) = x^4 + ax^2y + y^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Per determinare i punti di massimo e minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$, consideriamo per quali valori (x, y) si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2axy = 2x(2x^2 + ay) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ax^2 + 2y = 0.$$

Cio' accade se $(x, y) = (0, 0)$, qualsiasi sia il valore di a , inoltre se $a = \pm 2$ ciò accade anche nei punti $(x, \mp x^2)$, rispettivamente, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Poiché il determinante della matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ è zero, da ciò non posso dedurre se l'origine è un punto di massimo, minimo o sella per f .

Si osservi comunque che $f(0, 0) = 0$ per ogni a , $f(x, -x^2) = 0$ se $a = 2$, $f(x, x^2) = 0$ se $a = -2$. Se si studia il segno di f si osserva che se $-2 \leq a \leq 2$ $f(x, y)$ è sempre non negativa (in particolare per $a = \pm 2$ si ha $f(x, y) = (x^2 \pm y)^2$). Mentre se $a > 2$ o $a < -2$, f è negativa nella zona compresa tra le due parabole:

$$-\frac{1}{2}x^2(a - \sqrt{a^2 - 4}) < y < -\frac{1}{2}x^2(a + \sqrt{a^2 - 4})$$

e positiva esternamente. Ciò significa che $(0, 0)$ è minimo locale (ed anzi globale) per f se e solo se $-2 \leq a \leq 2$ (in caso contrario ogni suo intorno contiene punti dove la f assume sia valori positivi che negativi). Inoltre se $a = \pm 2$ i punti $(x, \mp x^2)$ sono punti di minimo locale (ed anzi globale).

☹- 10) Siano $P^i = (x^i, y^i, z^i)$ per $i = 1, \dots, M$, M punti dello spazio $\mathbb{R}^3$. Siano

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^M [(x - x^i)^2 + (y - y^i)^2 + (z - z^i)^2].$$

e, se $M = 2$,

$$g(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 [|x - x^i| + |y - y^i| + |z - z^i|].$$

Determinare i punti di minimo relativo di $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$.

Per quanto riguarda f osserviamo che f è la somma delle distanze euclidee nello spazio di un punto generico (x, y, z) dagli M punti fissati, inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^M 2(x - x^i) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^M 2(y - y^i) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^M 2(z - z^i) = 0$$

implica che

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sum_{i=1}^M x^i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^M y^i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^M z^i}{M} \right),$$

(che è il baricentro degli M punti). Dato che la matrice Hessiana di f risulta essere una matrice diagonale con tre valori positivi (uguali a $2M$) sulla diagonale, il baricentro è un punto di minimo relativo di f .

Per quanto riguarda g , bisogna invece distinguere i seguenti tre casi:

- 1 se $x < \min\{x^1, x^2\}$, $|x - x^1| + |x - x^2| = x^1 + x^2 - 2x$
- 2 se $\min\{x^1, x^2\} \leq x \leq \max\{x^1, x^2\}$, $|x - x^1| + |x - x^2| = \max\{x^1, x^2\} - \min\{x^1, x^2\}$
- 3 se $x > \max\{x^1, x^2\}$, $|x - x^1| + |x - x^2| = 2x - x^1 - x^2$

(ovviamente lo stesso vale per y, z). Poiché non esistono valori di x che annullino nei casi 1 e 3 la derivata di g in x , mentre per ogni valore di x nel caso 2 la derivata di g è nulla (come derivata di una funzione costante), si deduce che tutti i punti (x, y, z) dello spazio interni al parallelepipedo così definito $[\min\{x^1, x^2\}, \max\{x^1, x^2\}] \times [\min\{y^1, y^2\}, \max\{y^1, y^2\}] \times [\min\{z^1, z^2\}, \max\{z^1, z^2\}]$ sono punti di minimo relativo (ed anzi assoluto) per g , che lì risulta essere per di più costante. Infatti per la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$ si ha

$$\max\{x^1, x^2\} - \min\{x^1, x^2\} = |x^1 - x^2| = |x^1 - x + x - x^2| \leq |x - x^1| + |x - x^2|,$$

(ovviamente lo stesso vale per y, z), quindi

$$g(x, y, z) \geq \max\{x^1, x^2\} - \min\{x^1, x^2\} + \max\{y^1, y^2\} - \min\{y^1, y^2\} + \max\{z^1, z^2\} - \min\{z^1, z^2\}.$$