

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 4

☺ – 1) Consideriamo le curve in forma parametrica in $\mathbb{R}^2$

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos t, \cos(2t)), \quad \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$$

$$\phi :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t) \quad \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t^3, \sin t)$$

Per ognuna di queste curve, dire per quali valori del parametro t esse sono continue, per quali sono C^1 , e calcolare la derivata $\phi'(t)$. Inoltre dire se si tratta di curve regolari o semplici. Infine disegnarne il grafico.

[FACOLTATIVO: calcolare la lunghezza d'arco $s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma$.]

Tutte le curve chiaramente sono di classe C^1 . Per la prima abbiamo

$$\phi'(t) = (-\sin t, -2\sin(2t)) = -\sin t \cdot (1, 4\cos t)$$

e vediamo che $\phi'(t) = (0, 0)$ se e solo se $\sin t = 0$, cioè la curva non è regolare nei punti del tipo $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Chiaramente la curva non è semplice, anzi è periodica di periodo 2π . Per disegnare il grafico basta scrivere

$$x = \cos t, \quad y = \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

e quindi la relazione tra x e y è data da

$$y = 2x^2 - 1.$$

Tenuto conto che $x = \cos t$ assume tutti i valori fra -1 e $+1$, vediamo che la curva è il tratto della parabola $y = 2x^2 - 1$ compreso tra i punti $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. La lunghezza d'arco per $0 < t < \pi$ è data da

$$s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma = \int_0^t \sin \sigma (\sqrt{1 + 16 \cos^2 \sigma}) d\sigma$$

che si può calcolare per sostituzione ottenendo

$$s(t) = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{8} \log(4 + \sqrt{17}) - \frac{\cos t}{4} \sqrt{1 + 16 \cos^2 t} - \frac{1}{8} \log(4 \cos t + \sqrt{1 + 16 \cos^2 t}).$$

Per la seconda curva

$$\phi'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

che non si annulla mai in quanto $|\phi'| \equiv 1$, quindi la curva è regolare ma non è semplice in quanto periodica. Dato che

$$x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t$$

abbiamo la relazione

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

ossia la curva è una circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. La lunghezza d'arco è semplicemente

$$s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma = \int_0^t ds = t.$$

Per la terza curva

$$\phi(t) = (2\sin t \cos t, -2\sin t \cos t) = 2\sin t \cos t \cdot (1, -1)$$

che non si annulla mai per i valori di t considerati $0 < t < \pi/2$, quindi la curva è regolare; si vede facilmente che si tratta anche di una curva semplice. Precisamente, dato che $x + y = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, si tratta del segmento che va da $(0, 1)$ a $(1, 0)$ (percorso dal primo verso il secondo). Inoltre per $0 < t < \pi/2$

$$s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma = \sqrt{2} \int_0^t \sin(2s) ds = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos t).$$

Per la quarta curva, infine,

$$\phi'(t) = (3t^2, \cos t)$$

che non si annulla mai, e la curva è sia regolare sia semplice. Il grafico si ottiene scrivendo $x = t^3$, $y = \sin t$, da cui

$$y = \sin(\sqrt[3]{x})$$

che non è difficile da disegnare (si tratta di una curva che oscilla in modo simile a $\sin x$ ma con oscillazioni sempre più lente man mano che $x \rightarrow \pm\infty$, e taglia l'asse x nei punti $(k\pi)^3$, $k \in \mathbb{Z}$). Notare che questa

funzione è singolare per $x = 0$, ma la curva in forma parametrica è regolare. Per la lunghezza d'arco abbiamo l'integrale

$$s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma = \int_0^t \sqrt{9s^2 + (\cos s)^2} ds$$

che non si può esprimere con funzioni elementari.

⊙ – **2**) Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 e supponiamo che il determinante Jacobiano $\det DF(x)$ sia diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che l'applicazione F è *aperta*, ossia per ogni aperto A anche l'insieme $F(A)$ è aperto.

[FACOLTATIVO: ⊙⊙ Aggiungiamo l'ipotesi $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F(x)| = +\infty$, il che vuol dire: per ogni $N > 0$ esiste $M > 0$ tale che $|x| > M$ implica $|F(x)| > N$. Allora l'immagine di F è tutto $\mathbb{R}^n$].

Per il Teorema dell'applicazione inversa, sappiamo che F è localmente invertibile. Allora se $y \in F(A)$, ossia $y = F(x)$ per qualche $x \in A$, esistono un intorno U di x e un intorno V di y tali che $F : U \rightarrow V$ è biunivoca con inversa C^1 . Quindi anche $F : U \cap A \rightarrow V \cap F(A)$ è biunivoca con inversa C^1 ; ma questo vuol dire che $V \cap F(A) = F^{-1}(U \cap A)$, ed essendo $U \cap A$ un aperto e F^{-1} continua, concludiamo che $V \cap F(A)$ è un aperto, che contiene il punto y , contenuto in $F(A)$: ossia y è interno ad A .

Passiamo alla seconda parte. Dato che $\mathbb{R}^n$ è aperto, abbiamo appena dimostrato che l'immagine di F cioè $F(\mathbb{R}^n) = E$ è un insieme aperto. Dimostriamo che E è anche un insieme chiuso. Infatti, sia y_n una successione di punti di E convergente ad un punto y ; vogliamo dimostrare che anche $y \in E$. Presa una successione x_n di punti tali che $F(x_n) = y_n$ (esistono perché gli y_n sono nell'immagine di F), vediamo che x_n è una successione limitata; infatti se non lo fosse potremmo trovare una sottosuccessione x_{n_k} tale che $|x_{n_k}| \rightarrow +\infty$, ma allora per l'ipotesi su F anche $|F(x_{n_k})| = |y_{n_k}| \rightarrow +\infty$ il che è assurdo (una successione convergente non può tendere in modulo a $+\infty$). Ora, da x_n successione limitata possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $x_{n_j} \rightarrow x$; quindi otteniamo che

$$y = \lim y_n = \lim F(x_n) = \lim F(x_{n_j}) = F(x)$$

per la continuità di F , e pertanto anche y appartiene all'immagine di F ossia E è chiuso.

Ma l'unico sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ non vuoto che sia al tempo stesso aperto e chiuso è tutto $\mathbb{R}^n$, e quindi otteniamo la tesi. [Per verificare quest'ultimo fatto, se non lo sapete già: supponiamo per assurdo che E non sia tutto $\mathbb{R}^n$, allora prendiamo due punti $a \in E$ e $b \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e uniamoli con un segmento $a + t(b - a)$, $0 \leq t \leq 1$. Partendo da $t = 0$ ossia dal punto a , consideriamo il sup dei τ tali che il pezzo di segmento fra $t = 0$ e $t = \tau$ sia tutto contenuto in E , chiamiamo tale sup t_0 e poniamo $\xi = a + t_0(b - a)$. Allora abbiamo trovato un punto ξ sulla frontiera di E ; ξ deve appartenere ad E perché E è chiuso, e deve esser interno ad E perché E è aperto, ma allora non può essere di frontiera, e questo è assurdo].

⊙ – **3**) Sia data una superficie S in $\mathbb{R}^3$, regolare di dimensione 2, in forma cartesiana, ossia del tipo

$$z = \psi(x, y), \quad \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$$

dove A è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto della superficie, cioè tale che $(x_0, y_0) \in A$ e $z_0 = \psi(x_0, y_0)$. Dimostrare che esiste una palla $B \subset \mathbb{R}^3$ di centro P e un'applicazione C^1 localmente invertibile $G : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ che porta i punti della superficie S nel piano coordinato $z = 0$; in altri termini, con un cambiamento di coordinate si può *spianare* localmente la superficie. [Suggerimento: $G(x, y, z) = (x, y, z - \psi(x, y))$].

L'applicazione G ha matrice Jacobiana

$$DG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -D_1\psi & -D_2\psi & 1 \end{pmatrix}$$

quindi vediamo che in ogni punto

$$\det DG = 1 \neq 0$$

ossia G è localmente invertibile. Inoltre, se (x, y, z) è un punto della superficie, cioè $z = \psi(x, y)$, si ha

$$G(x, y, z) = (x, y, \psi(x, y) - \psi(x, y)) = (x, y, 0)$$

quindi G porta i punti di S nel piano coordinato $z = 0$.

☺ – 4) Consideriamo la superficie S in $\mathbb{R}^3$ espressa in forma cartesiana

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

Verificare che il punto $P = (1, 1, 3)$ appartiene alla superficie. Scrivere l'equazione del piano tangente a S nel punto P . Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine parallelo al piano tangente. Calcolare un vettore normale a S in P . Quali di questi vettori appartengono allo spazio tangente a S in P : $(0, 0, 0)$, $(0, -2, 1)$, $(6, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$?

Chiaramente $f(1, 1) = 3$ quindi $P \in S$. Inoltre

$$Df(x, y) = (2x, 4y) \implies DF(1, 1) = (2, 4)$$

e l'equazione del piano tangente è

$$z = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ossia

$$z = 3 + 2(x - 1) + 4(y - 1) \equiv 2x + 4y - 3.$$

Il piano per l'origine parallelo al piano tangente è espresso da

$$z = 2x + 4y$$

che si può scrivere anche

$$2x + 4y - z = 0$$

ossia

$$(2, 4, -1) \cdot (x, y, z) = 0.$$

Vediamo quindi che un vettore normale alla superficie in P è il vettore $(2, 4, -1)$; dei quattro vettori dati solo $(0, 0, 0)$ appartiene allo spazio tangente.

☺ – 5) Siano

$$f(x, y) = \int_{\sin(x)}^{\sin(y)} e^{t^2} dt, \quad Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di f su Q .

Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (-e^{\sin^2(x)} \cos(x), e^{\sin^2(y)} \cos(y))$, che si annulla, in Q , nei punti $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 3\pi/2)$. Il secondo punto ed il quarto sono rispettivamente di minimo e massimo relativo; infatti la funzione integranda è positiva, e in un caso viene integrata tra 1 e -1 , nel secondo tra -1 e 1. Essendo l'intervallo di integrazione il “massimo” possibile, il valore ottenuto sarà il massimo (o il minimo) possibile. Gli altri due punti (nei quali la funzione vale zero), non sono né massimi, né minimi; ad esempio, $f(\pi/2, y)$ è negativa, mentre $f(x, \pi/2)$ è positiva.

Sulla frontiera, uno dei due estremi di integrazione vale zero. Pertanto, nel miglior caso possibile, l'ampiezza dell'intervallo di integrazione è 1, e quindi il valore dell'integrale è minore del valore in $(3\pi/2, 2\pi/2)$, e maggiore del valore in $(\pi/2, 3\pi/2)$, che quindi sono anche massimi assoluti per f .

☺ – 6) Sia $f(x, y) = y^2(1 + 3\sin(x)) - 3e^x y + (1 + \cos(x)) - x^3 e^y$. Dimostrare che esistono due punti di ascissa 1 intorno ai quali l'equazione $f(x, y) = 0$ è esplicitabile rispetto ad una delle due variabili, e determinare il comportamento della funzione esplicita.

Il geniale autore di questo esercizio ha visto bene di scrivere “punti di ascissa 1”, in luogo del corretto “punti di ascissa 0”, e quindi non sa nemmeno copiare bene. ... Andiamo pertanto a risolvere l'esercizio corretto! Si ha $f(0, y) = y^2 - 3y + 2$, che ha come soluzioni $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$. Si ha poi $\nabla f(x, y) = (3y^2 \cos(x) - 3e^x y - \sin(x) - 3x^2 e^y, 2y(1 + 3\sin(x)) - 3e^x - x^3 e^y)$, e quindi $\nabla f(0, 1) = (0, -1)$ e $\nabla f(0, 2) = (6, 1)$. In entrambi i casi, esiste una funzione $y = y(x)$ tale che $f(x, y(x)) \equiv 0$ in un intorno dei punti. La prima funzione ha derivata prima nulla (dato che $f_x(0, 1) = 0$); essendo $f_{xx}(0, 1) = -4$, si ha $y''(0) = -4$ e quindi $(0, 1)$ è un massimo. Intorno al secondo punto, invece, la funzione y è decrescente, dato che $y'(0) = -6$.

☺ – 7) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2x - y(x) \cos(xy(x))}{x \cos(xy(x))} \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

Il genio colpisce ancora... Grazie ad un improvviso -, l'esercizio era pressoché irrisolvibile. Rimettiamo le cose a posto:

$$y'(x) = \frac{2x - y(x) \cos(xy(x))}{x \cos(xy(x))}.$$

Cerchiamo allora una $f(x, y)$ tale che $f_x(x, y) = 2x - y \cos(xy)$ e $f_y(x, y) = -x \cos(xy)$. Integrando prima in x e poi in y , si vede facilmente che $f(x, y) = x^2 - \sin(xy) + c$ soddisfa le condizioni richieste. Imponendo la condizione $f(1, \pi) = 0$, si trova $c = -1$. Pertanto, la soluzione dell'equazione è data implicitamente da $x^2 - \sin(xy) - 1 = 0$ (volendo, si può esplicitare).

⊖-8) Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = 4 - z$ sull'ellisse ottenuta intersecando il cilindro $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$.

Finalmente un esercizio fattibile! Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, si tratta di trovare i punti critici "liberi" della funzione

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = 4 - z - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(x + y + z - 1).$$

Calcolando il gradiente, si ha il sistema

$$\begin{cases} -2\lambda x - \mu = 0, \\ -2\lambda y - \mu = 0, \\ -1 - \mu = 0, \\ x^2 + y^2 - 8 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo, si trova $\mu = -1$, $x = y = 1/(2\lambda)$, da cui $\lambda = \pm 1/4$, e quindi $x = y = \pm 2$, ed infine $z = 5$, ovvero $z = -3$. Chiaramente, il massimo si ottiene per $z = -3$, e vale 7, il minimo per $z = 5$, e vale -1.

⊖⊖-9) Si consideri la funzione $f(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3e^x - 3$. (i) Verificare che in un intorno di $(0, 0)$, l'insieme dei punti del piano tali che $f(x, y) = 0$ può essere definito esplicitamente nella forma $y = g(x)$. (ii) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2}.$$

(i) Per il Teorema della funzione implicita è sufficiente dimostrare che $f(0, 0) = 0$ e che $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, essendo $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx + 1 + \cos(xy)x$, si ha che $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$. (ii) Dato che $g(0)=0$ per definizione, il limite richiesto comporta la risoluzione della forma indeterminata 0/0. A tal fine utilizzeremo il teorema di De l'Hopital, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) + 3.$$

Poiché per costruzione

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{g(x)^2 + \cos(xg(x))g(x) + 3e^x}{2g(x)x + 1 + \cos(xg(x))x}$$

quindi $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = -3$ e il limite richiesto è quindi 0. (iii) Anche per calcolare il secondo limite utilizzeremo il teorema di De l'Hopital, ora per due volte consecutive dato che $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) + 3 = 0$, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x)}{2}.$$

Resta da calcolare $g''(x)$, a tal fine basterà derivare rispetto ad x l'espressione fornita al punto (ii) di $g'(x)$, denotando $N = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$ e $D = \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ si ha quindi:

$$g''(x) = -\frac{N'D - D'N}{D^2},$$

con

$$N' = 2g(x)g'(x) - \sin(xg(x))[g(x)(g(x) + xg'(x))] + \cos(xg(x))g'(x) + 3e^x$$

e

$$D' = 2g(x) + 2xg'(x) - \sin(xg(x))[x(g(x) + xg'(x))] + \cos(xg(x))$$

si ha $\lim_{x \rightarrow 0} N = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} D = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} N' = 0$ ed $\lim_{x \rightarrow 0} D' = 1$, segue che $\lim_{x \rightarrow 0} g''(x) = 3$ e quindi il limite richiesto assume il valore $3/2$.

©– **10**) Scrivere i primi tre termini del polinomio di Taylor associato alla funzione $x = x(y)$ definita implicitamente da $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ intorno al punto $(2, 1)$.

Si tratta di scrivere $x = x(y) = x(1) + x'(1)(y - 1) + 1/2 x''(1)(y - 1)^2 + o((y - 1)^2)$. Per definizione $x(1) = 2$, mentre essendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 3$ in $(2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0$ in $(2, 1)$ allora $x'(1) = 0$. Per calcolare

$$x''(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{x(y) - 2y}{2x(y) - y} \right) = \frac{(x'(y) - 2)(2x(y) - y) + (x(y) - 2y)(2x'(y) - 1)}{(2x(y) - y)^2}$$

da cui $x''(1) = -2/3$ e quindi:

$$x = x(y) = 2 - \frac{1}{3}(y - 1)^2 + o((y - 1)^2) .$$