

Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 5

⊙ – 1) Sia E un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ un punto qualunque. Chiamiamo

$$d(x, E) = \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$

la *distanza* di x da E . Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in E$ tale che $d(x, x_0) \equiv d(x, E)$ (detto il *punto di minima distanza* di x da E). Ce ne possono essere due diversi?

Se chiamiamo $L = d(x, E)$, osserviamo anzitutto che $L \geq 0$. Dalla definizione di estremo inferiore vediamo che per ogni $\epsilon > 0$ deve esistere un punto $y_\epsilon \in E$ con la proprietà

$$L \leq d(x, y_\epsilon) < L + \epsilon.$$

Scegliendo successivamente $\epsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$ possiamo così definire una successione di punti $y_1, y_2, y_3, \dots$ appartenenti all'insieme E con la proprietà

$$L \leq d(x, y_j) < L + 1/j$$

e quindi in particolare

$$d(x, y_j) \rightarrow L \quad \text{per } j \rightarrow +\infty.$$

Ma da $\{y_j\}$ successione nel chiuso limitato E possiamo estrarre una sottosuccessione $\{y_{j_k}\}$ convergente ad un punto $y_0 \in E$; e chiaramente si avrà

$$d(x, y_0) = \lim d(x, y_{j_k}) = L$$

per la continuità della funzione distanza.

Ovviamente in generale il punto trovato potrebbe non essere unico; ad esempio se E è una circonferenza e x il suo centro, tutti i punti di E sono alla stessa distanza da E .

⊙ – 2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x + y)^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

[Suggerimento: utilizzare la nuova funzione incognita $z = x + y$].

Ponendo come nel suggerimento $z(x) = y(x) + x$ ed osservando che $z' = y' + 1$, otteniamo il nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^2 + 1 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Si tratta di un problema a variabili separabili, anzi autonomo (= la x non compare a secondo membro). Il secondo membro non si annulla mai, e quindi possiamo scrivere

$$\frac{z'}{z^2 + 1} = 1$$

ossia

$$(\arctan z)' = (x)'$$

e integrando fra x_0 e x otteniamo

$$\arctan(z(x)) - \arctan(z(x_0)) = x - x_0$$

ossia, dato che $x_0 = 0$ e $z(0) = 1$,

$$\arctan(z(x)) - \arctan 1 = x$$

cioè

$$\arctan(z(x)) - \frac{\pi}{4} = x$$

e finalmente

$$z(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ricordando che $y(x) = z(x) - x$ concludiamo che

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x.$$

☺ – **3**) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 + \alpha x + \beta y - e^{x+y}}{x^2 + y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{in } (0, 0) \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono parametri reali. Determinare l'insieme di definizione di f . Inoltre determinare per quali valori di α, β la funzione è continua, per quali valori è derivabile, per quali valori è differenziabile.

La funzione è definita ovunque, e fuori dall'origine è di classe C^∞ . Studiamone il comportamento in $(0, 0)$. Se ci avviciniamo all'origine lungo l'asse x , ossia consideriamo dei punti del tipo $f(x, 0)$ e mandiamo $x \rightarrow 0$, otteniamo:

$$f(x, 0) = \frac{1 + \alpha x - e^x}{x^2};$$

si verifica subito (ad esempio con de l'Hôpital) che se $\alpha \neq 1$ si ha $f(x, 0) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow 0$ a seconda del segno di α e di x , ma non si ottiene un limite finito; se invece $\alpha = 1$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(sempre con de l'Hôpital). Basta questa osservazione per dedurre che il limite di $f(x, y)$ in $(0, 0)$ non è mai 0 e la funzione non è continua. Questo qualunque sia il valore di β . In conclusione la funzione non è continua in 0 per qualunque scelta dei parametri.

Alternativamente, per fare le cose più complicate possiamo anche utilizzare lo sviluppo di Taylor

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + R_2(t)$$

ottenendo

$$\frac{1 + \alpha x + \beta y - e^{x+y}}{x^2 + y^2} = \frac{(\alpha - 1)x + (\beta - 1)y - (x + y)^2/2 + R_2(x + y)}{x^2 + y^2}.$$

Se notiamo che (tutti i limiti che seguono sono per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$)

$$\lim \frac{R_2(x + y)}{x^2 + y^2} = 0$$

resta da calcolare il limite di

$$\frac{(\alpha - 1)x + (\beta - 1)y - (x + y)^2/2}{x^2 + y^2} = \frac{(\alpha - 1)x + (\beta - 1)y}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}.$$

Se $\alpha \neq 1$ oppure $\beta \neq 1$ vediamo subito che il primo limite tende a $\pm\infty$ (a seconda del segno di x, y, α e β) mentre le altre due frazioni sono limitate; se invece scegliamo $\alpha = \beta = 1$ ci riduciamo a calcolare il limite di

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}$$

che non esiste perché dipende dalla direzione secondo la quale ci avviciniamo a 0, ad esempio lungo la retta $2x = y$ il limite è uguale a $-1/10$. In conclusione f non è continua per nessuna scelta dei parametri.

Se f non è continua in 0 non può essere differenziabile. Potrebbe essere derivabile in 0, anche se non sarà mai C^1 , ma come abbiamo visto prima $f(x, 0)$ non è continua e quindi non può essere derivabile in 0, e questo vuol dire che non esiste la derivata parziale $D_1 f$ in $(0, 0)$; discorso analogo per $D_2 f$.

☺ – **4**) Trovare massimi e minimi di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2$ sul piano $x + y + z = 1$.

Anzitutto osserviamo che la funzione f tende a $+\infty$ per $(x, y, z) \rightarrow \infty$ in quanto $f(x, y, z) \geq r^2$. In particolare non può avere massimo sul piano P dato da $x + y + z = 1$. Invece deve avere un minimo assoluto: per vederlo basta considerare una sfera abbastanza grande, ad esempio $B(0, 2)$: fuori da $B(0, 2)$ la funzione vale più di

$$f(x, y, z) \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 2^2 = 4,$$

dentro la sfera scegliamo un punto, ad esempio $(0, 0, 1)$, che sta sul piano, e otteniamo

$$f(0, 0, 1) = 3$$

e quindi il minimo di f su $B \cap P$, che esiste per Weierstrass, è anche il minimo assoluto di f . In conclusione: siamo sicuri che f ha un minimo assoluto e dovrà essere uno dei punti ottenuti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il metodo dà subito le equazioni

$$2x = \lambda, \quad 2y = \lambda, \quad 6z = \lambda, \quad x + y + z = 1$$

da cui in un lampo

$$\lambda = \frac{6}{7}, \quad x = y = \frac{3}{7}, \quad z = \frac{1}{7}$$

e quindi l'unico punto ottenuto è proprio il minimo cercato $(3/7, 3/7, 1/7)$, in cui la funzione vale $f(3/7, 3/7, 1/7) = 3/7$.

☺☺ – 5) Data la curva $2x^2 + y^2 - x = 0$, trovare i suoi punti più vicini a $(0, 0)$ e quelli più lontani da $(0, 0)$.

Si tratta di trovare gli estremi della funzione $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ per (x, y) sul vincolo dato dalla curva; naturalmente conviene cercare gli estremi della funzione $f(x, y) = d^2 = x^2 + y^2$ che si hanno esattamente negli stessi punti. Notiamo subito che la relazione $F(x, y) = 2x^2 + y^2 - x = 0$ definisce effettivamente una curva C in forma implicita in quanto $DF = (4x - 1, 2y) \neq 0$ nei punti in cui $F(x, y) = 0$.

Notiamo anche che la curva è limitata: infatti se esistessero dei punti di C con $(x, y) \rightarrow \infty$ avremmo inevitabilmente che $2x^2 + y^2 - x \rightarrow +\infty$. Dunque f ha massimo e minimo su C . Il minimo si trova senza sforzo ed è il punto $(0, 0)$ dato che la curva passa per l'origine. Cerchiamo il punto più lontano.

Con il metodo di Lagrange otteniamo le equazioni

$$2x = \lambda(4x - 1), \quad 2y = 2\lambda y, \quad 2x^2 + y^2 - x = 0$$

ossia

$$2x = \lambda(4x - 1), \quad (\lambda - 1)y = 0, \quad 2x^2 + y^2 - x = 0.$$

Se nella seconda scegliamo $y = 0$ otteniamo dalla terza $x = 0$ oppure $x = 1/2$ e per soddisfare la prima basta scegliere rispettivamente $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$. Se nella seconda scegliamo $\lambda = 1$ otteniamo dalla prima $x = 1/2$ e dalla terza $y = 0$. In conclusione abbiamo trovato due punti

$$(0, 0), \quad (1/2, 0)$$

e il primo è il punto più vicino all'origine, il secondo quello più lontano, a distanza $1/2$. Notare che la curva è un'ellisse con asse maggiore lungo l'asse delle x .

☺ – 6) Verificare che il modulo del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si può calcolare nel modo seguente:

$$|x| = \max\left\{\sum_{i=1}^n x_i y_i : y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1\right\}.$$

Se x è il vettore nullo non c'è niente da dimostrare; supponiamo allora $x \neq 0$. Consideriamo la funzione su $\mathbb{R}^n$

$$f(y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore fissato, e cerchiamone il massimo sul chiuso limitato $C = \{y \in \mathbb{R}^n : |y|^2 = 1\}$, ossia col vincolo $F(y) = |y|^2 - 1 = 0$. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dà il sistema di $n + 1$ equazioni in $y_1, \dots, y_n$ e λ

$$x_j = 2\lambda y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad |y|^2 = 1.$$

Notare che λ non può essere nullo (altrimenti $x_j = 0 \forall j$). Otteniamo subito

$$y_j = \frac{x_j}{2\lambda}$$

e sostituendo nel vincolo

$$\frac{x_1^2}{4\lambda^2} + \dots + \frac{x_n^2}{4\lambda^2} = 1$$

da cui

$$\lambda^2 = \frac{|x|^2}{4}$$

e quindi

$$\lambda = \pm \frac{|x|}{2}.$$

Con la scelta del segno $+$ otteniamo il punto

$$y = \frac{x}{|x|}$$

che è il punto di massimo di f , in cui appunto

$$f(x/|x|) = \sum \frac{x \cdot x}{|x|} = |x|;$$

col segno meno otteniamo il punto di minimo

$$y = -\frac{x}{|x|}$$

in cui

$$f(-x/|x|) = -\sum \frac{x \cdot x}{|x|} = -|x|.$$

☺ – 7) Torniamo all'esercizio 1), e supponiamo di avere due insiemi E e F chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$. Definiamo

$$d(E, F) = \sup\{d(x, F), x \in E\}.$$

Mostrare con un esempio che può essere $d(E, F) \neq d(F, E)$.

Siano, ad esempio, $E = [-1, 1]$ e $F = [-2, 2]$. Allora $d(E, F) = 0$ (dato che ogni punto di E è in F), mentre $d(F, E) = 1$.

☺ – 8) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, che ha come radici $\lambda = -1 \pm i$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{-x}[A \cos(x) + B \sin(x)].$$

Assegnando le condizioni iniziali, si trova $A = 1$ e $-A + B = 1$, da cui la soluzione: $y(x) = e^{-x}[\cos(x) + 2\sin(x)]$.

☺☺ – 9) Determinare i punti di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \\ -(x^2 + y^2) & (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

È chiaro che la funzione può essere continua solo nell'origine (che è l'insieme dei punti tali che $x^2 + y^2 = -(x^2 + y^2) = 0$). Inoltre, dato che $x^2 + y^2$ converge a zero se (x, y) tende a $(0, 0)$ si ha continuità. Si vede inoltre facilmente che f è derivabile solo nell'origine, con derivate parziali entrambe nulle. Infine, essendo $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$, f è differenziabile in $(0, 0)$ (si vedano gli appunti...).

☺ – 10) Sia $f(x, y, z) = x^2 - z$. Trovare massimi e minimi di f su $E = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

Osserviamo innanzitutto che $\nabla f(x, y, z) = (2x, 0, -1)$, e quindi è sempre diverso da zero. Si tratta allora di studiare f sulla frontiera di E . Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo

$$H(x, y, z, \lambda) = x^2 - z - \lambda(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1),$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -8\lambda y = 0 \\ -1 - 18\lambda z = 0 \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda ricaviamo o $\lambda = 0$ (che però rende incompatibile la terza), o $y = 0$. Dalla prima, o $x = 0$, e λ qualsiasi, oppure $\lambda = 1$ e x qualsiasi. Nel primo caso, si ottiene (dalla quarta) $z = \pm \frac{1}{3}$, e quindi i due

punti $(0, 0, \pm \frac{1}{3})$. Dalla seconda, $z = -\frac{1}{18}$, e quindi $x = \pm \sqrt{\frac{35}{36}}$, ottenendo così i due punti $(\pm \sqrt{\frac{35}{36}}, 0, -\frac{1}{18})$. Ne segue quindi che il massimo vale $\frac{37}{36}$, mentre il minimo vale $-\frac{1}{3}$.

⊙ - **11**) Calcolare massimo e minimo di $f(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$ sull'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$. Suggerimento: esiste un modo *molto* rapido per eseguire il calcolo.

Consideriamo $g(z) = z^6$. Scrivendo $z = x + iy$, abbiamo $\Re g(z) = f(x, y)$. Ora $|g(z)| \leq 1$ se $x^2 + y^2 \leq 1$. Dal momento che $|\Re g(z)| \leq |g(z)|$, ne segue che $|\Re g(z)| = |f(x, y)| \leq 1$ su $x^2 + y^2 \leq 1$. Siccome $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$, ecco il massimo; siccome $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$, ecco il minimo...

⊙⊙ - **12**) Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2) + 2xy$ nel cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Per prima cosa ricerchiamo i punti stazionari di f all'interno del cilindro C .

$$\nabla f = (2xz + 2y, 2yz + 2x, x^2 + y^2) = (0, 0, 0)$$

se e solo se $(x, y, z) = (0, 0, z)$ per ogni $0 < z < 1$. Poiché la matrice hessiana ha in questi punti determinante nullo, non è possibile da essa dedurre se si tratta di massimi o minimi relativi per f . In ogni caso $f(0, 0, z) = 0$, quindi per stabilire se si tratta di massimi o minimi relativi non resta altro che studiare il segno di f in un intorno di tali punti. Per esempio lungo il piano $z = c \in (0, 1)$, cui appartiene il punto stazionario $(0, 0, c)$, si ha $f(x, y, c) = c(x^2 + y^2) + 2xy$; in particolare sui punti della retta $y = -\alpha x$ del piano $z = c$, la f assume il valore $x^2(c(1 + \alpha^2) - 2\alpha)$, che risulta essere negativo o positivo, per $x \neq 0$, a seconda che α appartenga o meno all'intervallo di $\mathbb{R}^+$, $(1/c[1 - \sqrt{1 - c^2}], 1/c[1 + \sqrt{1 - c^2}])$. Non mantenendo segno costante f in un intorno (addirittura piano) di tali punti stazionari $(0, 0, z)$, $0 < z < 1$, si deduce che essi sono punti di sella per f .

Resta da analizzare la frontiera del cilindro, costituita da tre superfici, le due basi $S_1 = \{z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$ e $S_2 = \{z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$ e il mantello laterale $S_3 = \{x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$, e da due curve $\gamma_1 = \{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$.

Sulla base S_1 , $f(x, y, 0) = 2xy$ ammette come unico punto stazionario l'origine $(0, 0)$ (infatti $\nabla f = (2y, 2x) = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$); ancora una volta $(0, 0, 0)$ è un punto di sella infatti $f(0, 0, 0) = 0$, mentre $f(x, y, 0) = 2xy$ e quindi f sul piano $z = 0$ è positiva nel I e III quadrante e negativa altrove.

Su γ_1 , $f(x, y, 0) = 2xy = f(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Poiché $\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 0$ se e solo se $\tan^2\theta = 1$, e cioè se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ o $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, gli unici punti stazionari di f sono i punti $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$ ove f vale 1 e i punti $(\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$ ove f vale -1, rispettivamente massimi e minimi relativi di f su γ_1 . Inoltre per $\theta = 0$ si ha $f(1, 0, 0) = 0$.

Sulla base S_2 , $f(x, y, 1) = (x + y)^2$ ammette come unici punti stazionari i punti $(x, -x)$ per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ (infatti $\nabla f = (2(x + y), 2(x + y)) = (0, 0)$ se e solo se $y = -x$); $(x, -x, 1)$ sono punti di minimo relativo di f ristretta al piano $z = 1$ essendo $f(x, -x, 1) = 0$, mentre $f(x, y, 1) \geq 0$.

Su γ_2 , $f(x, y, 1) = (x + y)^2 = f(\theta) = (\cos\theta + \sin\theta)^2$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Poiché $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 0$ se e solo se $\tan^2\theta = 1$, e cioè se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ o $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, gli unici punti stazionari di f sono i punti $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 1)$ ove f vale 2 e i punti $(\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 1)$ ove f vale 0, rispettivamente massimi e minimi relativi di f su γ_2 . Inoltre per $\theta = 0$ si ha $f(1, 0, 1) = 1$.

Sul mantello laterale S_3 , $f(x, y, z) = f(\theta, z) = z + 2\cos\theta\sin\theta$, essendo $\frac{\partial f(\theta, z)}{\partial z} \equiv 1$ non esistono punti stazionari di f su S_3 .

Raccogliendo le informazioni sopra ottenute si deduce quindi che il minimo assoluto di f è -1 assunto nei punti della frontiera del cilindro $(\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$ mentre il massimo assoluto di f è 2 assunto nei punti della frontiera del cilindro $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 1)$.

⊙ - **13**) Definiti

$$f_\alpha(x, y) = \left[\left(\frac{x}{y^2 + 1} \right)^2 - \frac{|x|}{y^2 + 1} + 1 \right]^\alpha$$

ed

$$T_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\theta(y^2 + 1) \leq x \leq \theta(y^2 + 1), -1 \leq y \leq 1\}.$$

Determinare massimo e minimo assoluto di f_α in T_θ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $\theta \in (0, +\infty)$.

(Suggerimento: pensare T_θ come l'unione dei punti $(h(y^2 + 1), y)$ al variare di $h \in [-\theta, \theta]$)

Per prima cosa se $\alpha = 0$, $f_\alpha(x, y) \equiv 1$, e quindi come funzione costante ha massimo e minimo assoluto coincidenti e uguali a 1. Se $\alpha \neq 0$ invece, utilizzando il suggerimento, calcoliamo: $f_\alpha(h(y^2 + 1), y) = f_\alpha(h) = [h^2 - |h| + 1]^\alpha$ per $h \in [-\theta, \theta]$. Poiché $f_\alpha(h) = f_\alpha(-h)$, basterà considerare $h \in [0, \theta]$. Dato che

$$\frac{\partial f_\alpha(h)}{\partial h} = \alpha[h^2 - h + 1]^{\alpha-1}(2h - 1) = 0$$

se e solo se $h = 1/2$ (sia che $\alpha \leq 1$, sia che $\alpha > 1$ essendo $h^2 - h + 1 = 0$ privo di radici reali). Inoltre da sopra $f_\alpha(h)$ risulta essere crescente per $h > 1/2$ se $\alpha > 0$ o per $h < 1/2$ se $\alpha < 0$, decrescente altrimenti. Osserviamo inoltre che $f_\alpha(\theta) > 1$ se e solo se $\theta > 1$ e $\alpha > 0$, se e solo se $0 < \theta < 1$ e $\alpha < 0$. Quindi si ha:

Per $\alpha > 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$ il massimo assoluto di f_α vale 1, ed è assunto nei punti $(0, y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale $[\theta^2 - \theta + 1]^\alpha$ ed è assunto nei punti $(\theta(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

Per $\alpha > 0$ e $\theta \in [1/2, 1)$ il massimo assoluto di f_α vale 1, ed è assunto nei punti $(0, y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale $(3/4)^\alpha$ ed è assunto nei punti $(1/2(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

Per $\alpha > 0$ e $\theta \geq 1$ invece il massimo assoluto di f_α vale $[\theta^2 - \theta + 1]^\alpha$ ed è assunto nei punti $(\theta(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale $(3/4)^\alpha$ ed è assunto nei punti $(1/2(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

Per $\alpha < 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$ il massimo assoluto di f_α vale $[\theta^2 - \theta + 1]^\alpha$ ed è assunto nei punti $(\theta(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale 1 ed è assunto nei punti $(0, y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

Per $\alpha < 0$ e $\theta \in [1/2, 1)$ il massimo assoluto di f_α vale $(3/4)^\alpha$, ed è assunto nei punti $(1/2(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale 1 ed è assunto nei punti $(0, y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

Per $\alpha < 0$ e $\theta \geq 1$ invece il massimo assoluto di f_α vale $(3/4)^\alpha$ ed è assunto nei punti $(1/2(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$, mentre il minimo assoluto di f_α vale $[\theta^2 - \theta + 1]^\alpha$ ed è assunto nei punti $(\theta(y^2 + 1), y)$ per ogni $y \in [-1, 1]$.

☉ - 14) Trovare massimo e minimo di $f(x, y) = 2x + y$ sulla curva del piano $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange basterà determinare i punti stazionari della funzione di tre variabili $F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$. Si ha

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) = (2 + \lambda(2x - y), 1 + \lambda(-x + 2y), x^2 - xy + y^2 - 1) = (0, 0, 0).$$

Sommando alla equazione $2 + \lambda(2x - y) = 0$ due volte l'equazione $1 + \lambda(-x + 2y) = 0$ si ha $4 + 3\lambda y = 0$, da cui $\lambda \neq 0$ e $y = -\frac{4}{3\lambda}$. Sostituendo tale valore di y nella prima equazione si ricava $x = -\frac{5}{3\lambda}$ e quindi dalla terza equazione (l'equazione del vincolo) si ricava $\lambda = \pm\sqrt{7}/\sqrt{3}$. I punti ricavati sono $(-5/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21})$ e $(5/\sqrt{21}, 4/\sqrt{21})$ ove f vale rispettivamente $-2\sqrt{7}/\sqrt{3}$ e $2\sqrt{7}/\sqrt{3}$. Poiché la funzione f assegnata è continua su $\mathbb{R}^2$ e la curva assegnata è chiusa e limitata (si tratta di una ellisse traslata) il teorema di Weierstrass assicura che f ammette sul vincolo minimo e massimo assoluti, quindi rispettivamente uguali a $-2\sqrt{7}/\sqrt{3}$ e $2\sqrt{7}/\sqrt{3}$.

☉- 15) Trovare il punto sulla retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione delle due superfici :

$$x + y + z = 0, \quad x + 2y - z = 0$$

che ha distanza euclidea massima dal punto $(1, 1, 1)$

In questo caso è possibile ricavare una parametrizzazione del vincolo che risulta descritto dall'insieme dei punti $(-3/2 y, y, 1/2 y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. La funzione da massimizzare risulta essere la distanza euclidea di un punto generico (x, y, z) , che si richiede appartenente al vincolo, dal punto $(1, 1, 1)$. Massimizzare la funzione distanza equivale a massimizzare la funzione distanza al quadrato, quest'ultimo problema risulta più semplice nei calcoli. Quindi il problema si riduce a ricavare i punti di massimo (ora libero) della funzione:

$$f(y) = d((-3/2 y, y, 1/2 y), (1, 1, 1)) = (-3/2 y - 1)^2 + (y - 1)^2 + (1/2 y - 1)^2, y \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 7y$, il suo unico punto stazionario si ottiene per $y = 0$ e quindi $(-3/2 y, y, 1/2 y) = (0, 0, 0)$. A ben vedere si poteva subito osservare che la funzione f è illimitata in y quindi il massimo di f è $+\infty$, e quello determinato non è altro che il punto sulla retta dello spazio assegnata che ha distanza euclidea minima dal punto $(1, 1, 1)$ (tale distanza coincide con $f(0)^{1/2} = \sqrt{3}$). Ciò non è in contraddizione con il teorema di Weierstrass essendo sì la distanza euclidea da un punto fissato continua in $\mathbb{R}^3$, ma la retta assegnata non compatta in $\mathbb{R}^3$.

☺☺ – **16**) Determinare massimo e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y) = xye^{(x+1)^2+k(y-1)^2}$ sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Per prima cosa ricerchiamo i punti stazionari interni al quadrato, cioè in $(0, 1) \times (0, 1)$, in particolare si ha

$$\nabla f = e^{(x+1)^2+k(y-1)^2}(y(1+2x(x+1)), x(1+2ky(y-1))) = (0, 0) ,$$

solamente nel punto $(0, 0)$, che non è però interno. Resta da studiare f lungo i quattro lati del quadrato.

Se $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ si ha $f(0, y) = 0$, e lo stesso accade se $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ infatti $f(x, 0) = 0$.

Invece se $y = 1, 0 < x < 1$ si ha $f(x, 1) = xe^{(x+1)^2}$. f è chiaramente crescente per ogni $0 < x < 1$ (e per ogni k), quindi il suo massimo e minimo sono assunti rispettivamente sui vertici del quadrato $(1, 1)$ e $(0, 1)$, con $f(1, 1) = e^4$ e $f(0, 1) = 0$.

Infine se $x = 1, 0 < y < 1$ si ha $f(1, y) = ye^{4+k(y-1)^2}$. Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{4+k(y-1)^2}(1+2ky(y-1)) = e^{4+k(y-1)^2}k(2y^2-2y+1/k) ,$$

si deduce che f è crescente per ogni $0 < y < 1$ se $k \leq 2$, oppure se $k > 2$ e $0 < y < 1/2[1 - \sqrt{1-2/k}]$ oppure $1/2[1 + \sqrt{1-2/k}] < y < 1$.

Per $k \leq 2$ quindi non esistono punti stazionari di f ristretta a tale lato e il massimo e il minimo sono assunti rispettivamente sui vertici del quadrato $(1, 1)$ e $(1, 0)$, con $f(1, 1) = e^4$ e $f(1, 0) = 0$.

Per $k > 2$ invece esistono due punti stazionari di f ristretta a tale lato $(1, 1/2[1 - \sqrt{1-2/k}])$ che è un massimo relativo di f , ristretta al lato e $(1, 1/2[1 + \sqrt{1-2/k}])$ che è un minimo relativo di f , ristretta al lato.

In sintesi il massimo assoluto di f è e^4 nel punto $(1, 1)$ se $k \leq 2$, se $k > 2$ invece è il massimo tra e^4 e il valore $1/2[1 - \sqrt{1-2/k}]e^{4+k/4[1+\sqrt{1-2/k}]^2}$, mentre il minimo assoluto è sempre assunto sui punti $(0, y)$ e $(x, 0)$, per ogni $0 \leq x, y \leq 1$.

☺ – **17**) Determinare massimo e minimo assoluti per $f(x, y) = 3x - 2y$ nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |\sin(x)|, x^2 + y^2 \leq 25, -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

Con facilità si osserva che in nessun punto si annulla il gradiente di f , quindi i massimi e minimi di f , che esistono essendo f continua ed il dominio un chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, vanno ricercati sul bordo. Le rette $x = \pm\pi$ intersecano la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 25$ nei punti $(\pm\pi, y_0)$ dove $y_0 := \sqrt{25 - \pi^2}$.

Se $x = \pm\pi, f(\pm\pi, y) = \pm 3\pi - 2y$ è decrescente in y quindi il minimo e il massimo sono assunti rispettivamente in $(\pm\pi, y_0)$ e in $(\pm\pi, 0)$, con $f(\pm\pi, y_0) = \pm 3\pi - 2y_0$ e $f(\pm\pi, 0) = \pm 3\pi$.

Lungo la curva $y = |\sin x|$ si ha $f(x, |\sin x|) = 3x - 2|\sin x|$, tale funzione è priva di punti stazionari per $x \in (-\pi, \pi)$ (gli estremi sono già stati presi in considerazione nel passaggio precedente).

Lungo la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 25, y > 0, x \in (-\pi, \pi)$ si ha $f(x, y) = g(x) := 3x - 2\sqrt{25 - x^2}$, tale funzione è priva di punti stazionari per $x \in (-\pi, \pi)$ (gli estremi sono già stati presi in considerazione nel primo passaggio).

Quindi non resta altro che confrontare i valori ottenuti nel primo passaggio e dedurre che il massimo assoluto di f è 3π assunto nel punto $(\pi, 0)$ e il minimo assoluto è $-3\pi - 2y_0$ assunto nel punto $(-\pi, y_0)$.

☺ – **18**) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti (se esistono) per la funzione $f(x, y) = xy^2e^{x-y}$

(i) in $\mathbb{R}^2$ e (ii) in $[-2, 0] \times [0, 3]$

(i) Per prima cosa calcoliamo il gradiente di f . Si ha:

$$\nabla f = e^{x-y}(y^2(1+x), yx(2-y)) = (0, 0)$$

solamente nei punti $(x, 0)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e nel punto $(-1, 2)$.

Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial x} = e^{x-y}y^2(2+x), \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = e^{x-y}y(2-y)(1+x), \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial y} = e^{x-y}x(2-4y+y^2) ,$$

la matrice hessiana ha determinante nullo nei punti stazionari $(x, 0)$ qualsiasi sia x , mentre è definita positiva nel punto stazionario $(-1, 2)$ (è diagonale con $4e^{-3}$ e $2e^{-3}$ come elementi sulla diagonale), quest'ultimo risulta quindi essere un punto di minimo relativo per f , $f(-1, 2) = -4e^{-3}$. Studiare la natura dei punti $(x, 0)$ ove $f(x, 0) = 0$ equivale a studiare il segno di f in un intorno di essi. Poiché f è positiva per $x > 0$, nulla per $x = 0$ e negativa per $x < 0$, si deduce che i punti stazionari $(x, 0), x > 0$ sono punti di minimo relativo di f ,

i punti stazionari $(x, 0)$, $x < 0$ sono punti di massimo relativo di f , mentre il punto $(0, 0)$ è un punto di sella (ogni suo intorno contiene sia punti ove f è positiva sia punti ove f è negativa).

Dato che per ogni y fissato $xy^2e^{x-y} \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$, mentre per ogni $x < 0$ fissato $xy^2e^{x-y} \rightarrow -\infty$ se $y \rightarrow -\infty$, non esistono né massimi né minimi assoluti per la funzione f continua in $\mathbb{R}^2$, non compatto. Ciò non è in contraddizione con il teorema di Weierstrass essendo $\mathbb{R}^2$ non compatto.

(ii) Dal punto (i) sappiamo già che $(-1, 2)$ è l'unico punto di minimo relativo per f , $f(-1, 2) = -4e^{-3}$, interno al quadrato assegnato. Restano da considerare i quattro lati del quadrato.

Se $x = 0$ e $0 \leq y \leq 3$, $f(0, y) = 0$, lo stesso accade per $y = 0$ e $-2 \leq x \leq 0$, $f(x, 0) = 0$.

Se $y = 3$, $f(x, 3) = 9e^{-3}xe^x$, $-2 < x < 0$. Si osserva che

$$\frac{\partial f(x, 3)}{\partial x} = 9e^{-3}(1+x)e^x,$$

quindi esiste un unico punto stazionario interno a tale lato per $x = -1$. Tale funzione è crescente per $x > -1$ quindi assume il suo massimo in $(0, 3)$, ove vale 0, e il suo minimo in $(-1, 3)$ ove vale $-9e^{-4}$. Si osservi che $f(-2, 3) = -18e^{-5} < 0$.

Infine se $x = -2$, $f(-2, y) = -2e^{-2}y^2e^{-y}$, $0 < y < 3$. Si osserva che

$$\frac{\partial f(-2, y)}{\partial y} = -2e^{-2}y(2-y)e^{-y},$$

quindi esiste un unico punto stazionario interno a tale lato per $y = 2$, ove $f(-2, 2) = -8e^{-4}$, che risulta un minimo relativo di f ristretta a tale lato, nei vertici $(-2, 0)$ e $(-2, 3)$, la f è già stata calcolata, in particolare il massimo relativo di f ristretta a tale lato è 0 assunto in $(-2, 0)$.

Poiché f è continua sul quadrato, che è un compatto di $\mathbb{R}^2$, a differenza del punto (i) questa volta l'esistenza del massimo e del minimo assoluto di f è garantita dal teorema di Weierstrass. In particolare il massimo assoluto di f è 0 assunto sui lati $x = 0$, $0 \leq y \leq 3$ e $y = 0$, $-2 \leq x \leq 0$, mentre il minimo assoluto è $-4e^{-3}$ assunto nel punto $(-1, 2)$.