Analisi II, a.a. 2017-2018 — Soluzioni 6

☺☹ – **1)** Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:
(i) arco della parabola $f(x) = x^2$ fra i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$;
(ii) arco della curva $f(x) = \log x$ fra i punti di ascissa $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$;
(iii) arco della spirale di Archimede $r(\theta) = a \cdot \theta$ $(a > 0)$ per $0 \le \theta \le 2\pi$;
(iv) ☹ lunghezza totale dell'asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Le prime due curve sono di classe C^1 in forma cartesiana, quindi senz'altro regolari (e semplici) e il calcolo si effettua usando la formula

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Parabola:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Ricordiamo che questo integrale si può calcolare in vari modi. Un primo modo è utilizzare delle tavole di integrali o gli appunti dell'anno passato (e dato che questo è ammesso, l'esercizio è classificato ☺☺...). Un secondo modo è la sostituzione trigonometrica $2x = \tan t$. Un terzo modo utilizza le funzioni iperboliche

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

dotate delle proprietà

$$(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t, \qquad (\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t, \qquad 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t;$$

con la sostituzione $2x = \operatorname{sh} t$ si ha subito

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{1}{8} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{16} + \frac{t}{4} = \frac{1}{4}(\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t + t);$$

ora osserviamo che

$$\operatorname{sh} t = 2x, \quad \operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1 + 4x^2},$$

mentre t si può ricavare come segue

$$e^t - e^{-t} = 2 \operatorname{sh} t = 4x \qquad \Longrightarrow \qquad (e^t)^2 - 4x(e^t) - 1 = 0$$

da cui (scartando la radice negativa, l'esponenziale è positivo)

$$e^t = 2x + \sqrt{1 + 4x^2}.$$

Finalmente

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \log(2x + \sqrt{1 + 4x^2}).$$

In conclusione la lunghezza dell'arco di parabola è

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}).$$

Logaritmo:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (1/x)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{x^2 + 1}\, \frac{dx}{x}$$

usiamo l'astuta sostituzione $x^2 + 1 = t^2$ e abbiamo ($x = \sqrt{t^2 - 1}$, $dx = dt/\sqrt{t^2 - 1}$)

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, \frac{dx}{x} = \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = t + \frac{1}{2} \log \frac{t - 1}{t + 1}$$

e dato che a $x = \sqrt{3}$ corrisponde $t = 2$, a $x = \sqrt{8}$ corrisponde $t = 3$, otteniamo

$$L = 3 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{4} - 2 - \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}.$$

Spirale di Archimede: la curva è data in coordinate polari come $r = r(\theta)$, ossia in forma parametrica esplicita

$$\phi(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \cos \theta).$$

Ne segue (come sappiamo) che la lunghezza dell'arco è espressa dall'integrale

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta$$

e nel caso $r(\theta) = a\theta$ otteniamo

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

Procedendo come sopra si ottiene

$$\int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \log(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})$$

e quindi

$$L = a\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}).$$

L'asteroide è simmetrico rispetto agli assi, inoltre i suoi punti hanno coordinate comprese fra -1 e $+1$ come si verifica subito. Il grafico è composto da quattro archi simmetrici, quindi la lunghezza è quattro volte quella dell'arco nel primo quadrante. Si può procedere in vari modi, ad esempio esplicitando

$$y = f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 1$$

o anche parametrizzando l'arco come

$$\phi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Notiamo che in queste rappresentazioni la curva non è regolare agli estremi (infatti sono presenti delle cuspidi). Un modo di abbreviare i calcoli è il seguente: la funzione $y = f(x)$ soddisfa l'identità $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$, e derivando si ottiene

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} f^{-1/3} f' = 0$$

da cui

$$f'(x) = -f(x)^{1/3} x^{-1/3}$$

e quindi

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f^{2/3} x^{-2/3}} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^{2/3} + f^{2/3}}\, x^{-1/3} dx.$$

Ma la quantità sotto radice è uguale a 1 quindi

$$L = \int_{x_0}^{x_1} x^{-1/3} dx = \frac{3}{2}(x_1^{2/3} - x_0^{2/3}).$$

Scegliendo come estremi di integrazione 0 e 1 (o piú correttamente, facendo tendere x_0 a 0 e x_1 a 1 dato che agli estremi la funzione f non è regolare) otteniamo che $L = 3/2$, mentre la lunghezza totale dell'asteroide è esattamente uguale a $4L = 6$.

☺ – **2)** Calcolare $\int_\gamma \omega$ nei casi seguenti:

$$\omega(x, y) = (x + y)dx + (x - y)dy, \qquad \gamma = \text{ arco di circonferenza unitaria fra } (1, 0) \text{ e } (0, 1)$$

$$\omega(x, y) = \frac{dx}{x + y} + (x^2 + y^2)dy, \qquad \gamma = \text{ arco di parabola } y = x^2 \text{ fra } (1, 1) \text{ e } (2, 4)$$

$$\omega(x, y, z) = y\, dx - z\, dy + x\, dz, \qquad \gamma = \text{ segmento fra } (0, 0, 1) \text{ e } (1, 1, 2).$$

Queste forme sono chiuse? hanno una primitiva, ossia sono esatte? e in caso affermativo quali sono *tutte* le primitive? [Nota: per rispondere alla seconda domanda, risolvere direttamente le equazioni $D_1 f = \omega_1, \dots$].

Per la prima forma possiamo parametrizzare γ come

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad 0 \le t \le \pi/2$$

e abbiamo subito

$$\int_\gamma (x + y)dx + (x - y)dy = \int_0^{\pi/2} [(\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta) + (\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta] d\theta$$

ossia
$$\int_0^{\pi/2} [\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta]d\theta = \int_0^{\pi/2} [\cos 2\theta - \sin 2\theta]d\theta = \frac{1}{2}[\sin 2\theta + \cos 2\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$$
e quindi
$$\int_\gamma \omega = -1.$$
Notiamo poi che la forma è chiusa, in quanto
$$D_2\omega_1 = D_2(x+y) = 1, \quad D_1\omega_2 = D_1(x-y) = 1.$$
Cerchiamo di capire se la forma è anche esatta: se $\omega = df$ deve essere
$$D_1 f = \omega_1 = x + y, \qquad D_2 f = \omega_2 = x - y.$$
Risolviamo la prima equazione:
$$D_1 f = x + y \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$
dove $C(y)$ è una funzione arbitraria della sola y; vediamo se una funzione di questo tipo può risolvere anche la seconda equazione: sostituendo in $D_2 f = x - y$ otteniamo
$$x + C'(y) = x - y \quad \Longrightarrow \quad C'(y) = -y \quad \Longrightarrow \quad C(y) = -\frac{y^2}{2} + \alpha$$
dove α è una costante arbitratia. Quindi effettivamente le funzioni
$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + \alpha$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ sono (tutte e sole) le primitive di ω. A questo punto possiamo rispondere in modo piú semplice alla prima domanda:
$$\int_\gamma \omega = f(0,1) - f(1,0) = -1$$
come sapevamo già.
Seconda forma: parametrizziamo la parabola come
$$\gamma(x) = (x, x^2), \quad 1 \le x \le 2$$
e otteniamo
$$\int_\gamma \omega = \int_1^2 \left[\frac{1}{x+x^2} + (x^2+x^4)2x\right] dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + 2x^3 + 2x^5\right] dx$$
da cui
$$\int_\gamma \omega = \left(\log\frac{x}{x+1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right)_{x=1}^{x=2} = \log\frac{4}{3} + \frac{57}{2}.$$
La forma non è chiusa (e quindi non può essere esatta = non ha primitive):
$$D_2\omega_1 = D_2\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \qquad D_1\omega_2 = D_1(x^2+y^2) = 2x$$
che sono diverse. Se testardamente si vuole lo stesso cercare una primitiva il tentativo fallisce:
$$D_1 f = \frac{1}{x+y} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = \log(x+y) + C(y)$$
e quindi
$$D_2 f = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x+y} + C'(y) = x^2 + y^2$$
ma nessuna funzione $C'(y)$ può soddisfare questa identità (perché?).
Terza forma: possiamo parametrizzare il segmento come
$$\phi(t) = (t, t, t+1), \quad 0 \le t \le 1$$
ed abbiamo subito
$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [t\cdot 1 - (t+1)\cdot 1 + t \cdot 1]dt = (t^2/2 - t)_{t=0}^{t=1} = 0.$$

La forma non è chiusa: notare che devono essere vere TRE relazioni:

$$D_1\omega_2 = D_2\omega_1, \qquad D_1\omega_3 = D_3\omega_1, \qquad D_2\omega_3 = D_3\omega_2,$$

ma ad esempio abbiamo

$$D_1\omega_2 = 1 \neq D_2\omega_1 = 0.$$

☹ – **3)** Sia $\Omega = \{(x,y) : x + y \neq 0\}$, e sia

$$\omega = \frac{y}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy.$$

Determinare se $\omega(x,y)$ è chiusa, esatta, e in caso affermativo calcolarne *tutte* le primitive. In generale, se $\omega(x)$ è una forma esatta su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, con primitiva f, come si possono descrivere tutte le altre primitive di ω? Chiusura:

$$D_2\omega_1 = D_2\frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{(x+y)^2}, \qquad D_1\omega_1 = -D_1\frac{x}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{(x+y)^2}$$

quindi la forma è chiusa e potrebbe avere una primitiva. Proviamo a calcolarla:

$$D_1 f = \frac{y}{(x+y)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y) = -\frac{y}{x+y} + C(y)$$

(abbiamo integrato in x considerando y fissata); introducendo questa funzione nella seconda condizione si ottiene la relazione

$$D_2 f = -\frac{x}{(x+y)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{x}{(x+y)^2} + C'(y) = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

da cui chiaramente si ha che $C(y)$ deve essere una costante. Abbiamo quindi ottenuto le funzioni

$$f(x,y) = -\frac{y}{x+y} + \alpha$$

che sono primitive della forma data ω su tutto l'aperto Ω su cui essa è definita. Notare però che l'aperto è formato da due semipiani disgiunti, il che vuol dire che ha *due* componenti connesse:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = \{(x,y)\colon x > -y\}, \quad \Omega_2 = \{(x,y)\colon x < -y\}.$$

La costante arbitraria α si può anche scegliere diversa sulla prima e sulla seconda componente; quindi la risposta completa dell'esercizio è che le primitive di ω sono tutte e sole le funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{x+y} + \alpha_1 & \text{per } x > -y \\ -\dfrac{y}{x+y} + \alpha_2 & \text{per } x < -y \end{cases}$$

al variare di α_1 e α_2 in $\mathbb{R}$.
In generale, se f è una primitiva di ω su Ω, una qualunque altra primitiva g deve verificare la condizione

$$dg = df = \omega \qquad \Longrightarrow \qquad d(f-g) = 0$$

e quindi la differenza $f - g$ è costante su ciascuna componente connessa di Ω. Questo equivale a dire che ogni altra primitiva g si ottiene da f sommando ad f, su ogni componente connessa di Ω, una costante (arbitraria) che può anche non essere la stessa da componente a componente.

☹☺ – **4)** Data la forma $\omega(x,y) = e^y dx + (1 + xe^y)dy$, calcolare il suo integrale sulla curva $y = x^2 + e^x \cos x$ fra i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

L'integrale da calcolare è il seguente:

$$\int_0^1 [e^{x^2+e^x\cos x} + (1 + xe^{x^2+e^x\cos x})(2x + e^x(\cos x - \sin x)]dx$$

(esercizio per le vacanze di Natale dei prossimi 5 anni), oppure possiamo sperare che la forma data sia esatta. Anzitutto controlliamo che sia chiusa:

$$D_1\omega_2 = e^y, \qquad D_2\omega_1 = e^y.$$

Quindi potrebbe esistere una primitiva, cerchiamola:

$$D_1 f = e^y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y) = xe^y + C(y),$$

$$D_2 f = 1 + xe^y \qquad \Longrightarrow \qquad xe^y + C'(y) = xe^y + 1$$

e quindi otteniamo $C'(y) = 1$ ossia $C(y) = y + \alpha$. In altri termini le primitive sono

$$f(x, y) = y + xe^y + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Allora per calcolare l'integrale della forma sul cammino dato basta trovare il punto iniziale e il punto finale, e fare la differenza dei valori di f in questi punti. Per $x = 0$ si ha $y = 0 + e^0 \cos 0 = 1$, per $x = 1$ si ha $y = 1 + e^1 \cos 1$ e quindi

$$\int_\gamma \omega = f(1, 1 + e\cos 1) - f(0, 1) = e\cos 1 + e^{1+e\cos 1}$$

e questo è il valore dell'integrale scritto all'inizio (buone vacanze...)

☺ – **5)** Determinare φ in $C^1(\mathbb{R})$, con $\varphi(0) = 0$ tale che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = [2x + \varphi(y)]\, dx + [x(y - \varphi(y))]\, dy\,,$$

sia esatta, e calcolarne la primitiva che si annulla nell'origine.

Affinché ω sia esatta, deve essere chiusa. La condizione di chiusura dà $\varphi'(y) = y - \varphi(y)$, che è un'equazione differenziale, la cui soluzione è $\varphi(y) = \mathrm{e}^{-y} + y - 1$. La forma differenziale diventa pertanto

$$\omega(x, y) = [2x + \mathrm{e}^{-y} + y - 1]\, dx + [x(1 - \mathrm{e}^{-y})]\, dy\,.$$

Integrando la prima componente rispetto a x, si trova

$$f(x, y) = x^2 + x(\mathrm{e}^{-y} + y - 1) + g(y)\,,$$

e derivando

$$g'(y) + x(-\mathrm{e}^{-y} + 1) = x(1 - \mathrm{e}^{-y})\,.$$

Pertanto, $g'(y) \equiv 0$ e quindi $g(y)$ è una costante. Imponendo $f(0, 0) = 0$, si trova $g(y) \equiv 0$.

☹ – **6)** Sia $\omega(x, y) = y\, f(x)\, dx + x\, f(y)\, dy$. Determinare f affinché ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

La condizione di chiusura è $f(x) = f(y)$ per ogni x e y. Pertanto, f deve essere una funzione costante...

☹ – **7)** Data la forma differenziale $\omega(x, y) = 2x\, \varphi(y)\, dx + x^2\, \varphi(y)\, dy$, determinare l'unica funzione φ tale che $\varphi(0) = 1$ e che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$. Successivamente, calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione $\rho = \theta^2$, $0 \le \theta \le \pi$.

Imponendo la condizione di chiusura, si trova $\varphi'(y) = \varphi(y)$, da cui (con la condizione iniziale) $\varphi(y) = \mathrm{e}^y$. Una primitiva di ω è allora $f(x, y) = x^2\, \mathrm{e}^y$. Dal momento che la curva γ collega i punti $(0, 0)$ e $(-\pi^2, 0)$, l'integrale di ω lungo γ è uguale a π^4.

☺☹ – **8)** Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2}\, dy\,, \qquad p, q, r, s \in \mathbb{R}\,..$$

determinare per quali valori dei parametri la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e per quali valori è esatta. In corrispondenza di tali valori, calcolare le primitive.

Imponendo la condizione di chiusura, deve essere

$$\frac{-2y(px + qy)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{q}{x^2 + y^2} = \frac{-2x(rx + sy)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{r}{x^2 + y^2}\,.$$

Tale condizione è verificata se e solo se $p = s$ e $q = -r$, cosicché la forma differenziale diventa

$$\omega(x, y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{-qx + py}{x^2 + y^2}\, dy\,.$$

Affinché tale forma sia esatta, deve essere nullo l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa intorno all'origine. Scegliendo come curva la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 1, abbiamo (dopo alcuni calcoli)

$$\int_\gamma \omega = -2\pi\, q\,,$$

è quindi la forma differenziale è esatta se e solo se $q = 0$, ovvero se è
$$\omega(x,y) = \frac{px}{x^2+y^2}\,dx + \frac{py}{x^2+y^2}\,dy\,.$$
Tutte le primitive sono allora
$$f(x,y) = \frac{p}{2}\ln(x^2+y^2) + c\,,$$
con c costante arbitraria.

☺ – **9)** Dopo aver stabilito se è continua, derivabile, regolare, calcolare per ogni $R > 0$ la lunghezza della curva:
$$x(t) = R(t - \sin t)\,, \quad y(t) = R(1-\cos t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
La curva è continua e derivabile dato che lo sono ovviamente le sue coordinate $x(t)$ e $y(t)$. Il vettore tangente alla curva é $(x'(t), y'(t)) = (R(1-\cos t), R\sin t)$. La curva è quindi regolare dato che il vettore tangente ha norma, anzi per semplicità il quadrato della sua norma: $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2R^2(1-\cos t)$ non nullo nell'intervallo aperto $t \in (0, 2\pi)$. La lunghezza della curva è data da :
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos t}\;dt = 2\sqrt{2}R\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\;dt =$$
$$= -2\sqrt{2}R\int_1^{-1}\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-y^2}}\;dy = 2\sqrt{2}R\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+y}}\;dy = 8R\;.$$

☺ – **10)** Data la forma differenziale
$$\left(1+\frac{y^3}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right)dy\;,$$
determinarne l'insieme di definizione. È una forma esatta? In caso affermativo, calcolarne la primitiva che nel punto $(-1,3)$ assuma il valore 4.
L'insieme di definizione della forma è il piano privato dell'asse y. La forma è chiusa nel suo insieme di definizione, dato che:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{y^3}{x^2}\right) = \frac{3y^2}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{3y^2}{x}\right)\;;$$
quindi è esatta ad esempio nei due aperti semplicemente connessi $\{x > 0\}$ ed $\{x < 0\}$; calcoliamone tutte le primitive $F(x,y)$. Per definizione $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{y^3}{x^2}$ da cui integrando rispetto alla variabile x si deduce che: $F(x,y) = x - \frac{y^3}{x} + g(y)$, sappiamo poi sempre per definizione che $\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{3y^2}{x}$, mentre dalla forma ricavata precedentemente per F si ha: $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x} + g'(y)$, uguagliando i due membri destri delle ultime due uguaglianze si ha $g'(y) = y$ da cui $g(y) = y^2/2$. Quindi tutte le primitive sono della forma
$$F(x,y) = x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + C\;.$$
In particolare la primitiva che nel punto $(-1,3)$ assuma il valore 4 è $F(x,y) = x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} - \frac{53}{2}$ per $\{x < 0\}$.
E' ovvio che per $\{x > 0\}$ la costante nella definizione della primitiva resta invece arbitraria.